

الأضواء











3 الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

2026

# الرياضيات

# المحتويات

## أولًا: الجبر والإحصاء

### الوحدة الأولى



**العلاقات والدوال:**



### الوحدة الثانية



**النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى:**



### الوحدة الثالثة



**الإحصـــاء:**



## ثانيًا: حساب المثلثات والهندسة التحليلية

### الوحدة الرابعة



**حساب المثلثات:**



### الوحدة الخامسة



**الهندسة التحليلية:**

# توزيع مقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادى
## الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

| الشهر | الجبر والإحصاء | حساب المثلثات والهندسة التحليلية | عدد الفترات أسبوعيًا |
|---|---|---|---|
| سبتمبر ٢٠٢٥ | **الوحدة الأولى: العلاقات والدوال :**<br>• حاصل الضرب الديكارتى. | **الوحدة الرابعة : حساب المثلثات:**<br>• النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة. | (فترة ونصف) للجبر والإحصاء + (فترة واحدة) لحساب المثلثات والهندسة التحليلية |
| | • العلاقات. | • النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا الخاصة ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° | |
| أكتوبر ٢٠٢٥ | • الدالة (التطبيق). | • إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها. | |
| | • دوال كثيرات الحدود. | • تمارين متنوعة على حساب المثلثات. | |
| | • تابع: دوال كثيرات الحدود: الدالة التربيعية | **الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية:** | |
| | **الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى:** | • البُعد بين نقطتين • تابع: البُعد بين نقطتين | |
| نوفمبر ٢٠٢٥ | • التناسب. • النسبة. | • إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة | |
| | • تابع: التناسب (خواص التناسب). | • تابع: إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة | |
| | • تابع: التناسب (التناسب المتسلسل). | • ميل الخط المستقيم | |
| | • التغير الطردى والتغير العكسى. | • تابع: ميل الخط المستقيم | |
| | • تمارين على التغير الطردى والتغير العكسى. | • العلاقة بين ميلى المستقيمين (المتوازيين والمتعامدين). | |
| ديسمبر ٢٠٢٥ | **الوحدة الثالثة: الإحصـــاء:** | • تابع: العلاقة بين ميلى المستقيمين. | |
| | • التشتت: المدى • جمع البيانات | • معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات. | |
| | • الانحراف المعيارى | • تابع: معادلة الخط المستقيم. | |
| | • تمارين على الوحدة الثالثة. | • تمارين على الوحدة الخامسة. | |
| يناير ٢٠٢٦ | مراجعة عامة على المنهج | | |

# رمـــوز ريـاضيـــة

| الرمز | المعنى | الرمز | المعنى |
|---|---|---|---|
| ط | مجموعة الأعداد الطبيعية | ⊥ | عمودى على |
| ص | مجموعة الأعداد الصحيحة | // | يوازى |
| ن | مجموعة الأعداد النسبية | $\overline{أب}$ | القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ |
| ن* | ن - {صفر} | $\overleftarrow{أب}$ | الشعاع $\overleftarrow{أب}$ |
| ن' | مجموعة الأعداد غير النسبية | $\overleftrightarrow{أب}$ | الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ |
| ح | مجموعة الأعداد الحقيقية | أب | طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ |
| ح* | ح - {صفر} | ق(∠ أ) | قياس زاوية أ |
| $\sqrt{أ}$ ، أ ≤ ٠ | الجذر التربيعى الموجب للعدد أ | ق($\overset{\frown}{أب}$) | قياس القوس $\overset{\frown}{أب}$ |
| $\sqrt[3]{أ}$ | الجذر التكعيبى للعدد أ | ~ | يشابه |
| [أ ، ب] | الفترة المغلقة | ⇐ | يؤدى إلى |
| ]أ ، ب[ | الفترة المفتوحة | ≤ | أكبر من أو يساوى |
| [أ ، ب[ | فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة | ≥ | أقل من أو يساوى |
| ]أ ، ب] | فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة | ≡ | يطابق |
| [أ ، ∞[ | فترة غير محدودة | ⇔ | إذا وفقط إذا |
| ∞ | ما لا نهاية | ل(أ) | احتمال وقوع الحدث أ |
| ن(أ) | عدد عناصر المجموعة أ | $\overline{س}$ | الوسط الحسابى |
| ف | فضاء النواتج | σ | الانحراف المعيارى |
| ∀ | لكل | مجـ | مجموع |

# أولًا: الجبر والإحصاء

الوحدة الأولى



# العلاقات والدوال

## أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

**الدرس الأول: حاصل الضرب الديكارتى**

- يتذكر تساوى زوجين مرتبين.
- يتعرف مفهوم حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غيرخاليتين.
- يمثِّل حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين.

**الدرس الثانى: العلاقات والدوال**

- يتعرف مفهوم العلاقة من مجموعة غيرخالية إلى مجموعة غيرخالية أخرى.
- يتعرف مفهوم العلاقة من مجموعة غيرخالية إلى نفسها.
- يمثل العلاقة بمخطط سهمى أو بيانى (ديكارتى).
- يتعرف متى تكون العلاقة دالة.
- يتعرف المجال والمجال المقابل والمدى للدالة.

**الدرس الثالث: دوال كثيرات الحدود**

- يتعرف الدوال كثيرة الحدود.
- يبحث درجة الدالة كثيرة الحدود.

**الدرس الرابع: دراسة بعض الدوال كثيرات الحدود**

- يتعرف مفهوم كل من الدالة الثابتة والدالة الخطية ويمثلهما بيانيًا.
- يتعرف الدالة التربيعية ويمثل منحناها بيانيًا.
- يوجد نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية والقيمة العظمى أو الصغرى ومعادلة محور التماثل.



فيديو الشرح

ذاكر الدرس 1

# حاصل الضرب الديكارتى

## فكر وناقش

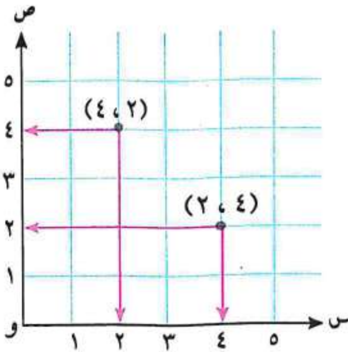
- سبــق أن درسنــا مفهوم الزوج المرتــب وتعلمنــا أن: (أ ، ب) يُسمى زوجًا مرتبًا،

ويُسمى أ **المسقط الأول** ، ويُسمى ب **المسقط الثانى**

- **وتعلمنا أيضًا:** أن كل زوج مُرتب يُمثل بنقطة واحدة، وواحدة فقط فى المستوى الإحداثى.

- **والآن مستعينًا بالرسم المقابل:**

هل الزوج المرتب (٢، ٤) يساوى الزوج المرتب (٤، ٢)؟




## أولًا تساوى زوجين مرتبين:

إذا كان: (س ، ص) = (أ ، ب) فـإن: س = أ ، ص = ب

**فمثلًا:**

- إذا كان: (أ ، ب) = (٣ ، ٦) فـإن: أ = ٣ ، ب = ٦
- إذا كان: (س ، ٣) = (-٧ ، ص) فـإن: س = -٧ ، ص = ٣

## نقاط هامة

- إذا كان: أ ≠ ب فـإن: (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) مثـل: (٢ ، ٤) ≠ (٤ ، ٢)
- (أ ، ب) ، {أ ، ب} مفهومان مختلفان لا يمكن المقارنة بينهما، فالزوج المرتب ليس مجموعة.
- يمكن تكرار المسقط داخل الزوج المرتب (أ ، أ) ، ولكن لا يمكن تكرار العنصر داخل المجموعة مثـل: لا نكتب {أ ، أ} بل نكتب {أ}.
- توجد مجموعة خالية من العناصر { } ويُرمز لها بالرمز ∅ ولكن لا يوجد زوج مرتب خالٍ.

## مثال ١

**أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى إذا كان:**

١ (٦ ، ص − ٣) = (٢ − س ، −١)

٢ (س$^{٢}$ − ٧ ، ٢٦) = (٢ ، ص$^{٣}$ − ١)

٣ (س$^{٣}$ ، |ص|) = (٨ ، ٣)

٤ $\left(\frac{١}{س} ، ص^{-٣}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢٧}\right)$

٥ $\left(\sqrt[٣]{س} ، ٢٥\right)$ = (٨ ، ص$^{٢}$)

٦ (س + ص ، −٦) = (٢ ، −٣ س)

### الحل

١ ∵ (٦ ، ص − ٣) = (٢ − س ، −١)

∴ ٦ = ٢ − س ، ص − ٣ = −١

∴ س = −٤ ، ص = ٢

٢ ∵ (س$^{٢}$ − ٧ ، ٢٦) = (٢ ، ص$^{٣}$ − ١)

∴ س$^{٢}$ − ٧ = ٢ ، ص$^{٣}$ − ١ = ٢٦

س$^{٢}$ = ٩ ، ص$^{٣}$ = ٢٧

س = ±٣ ، ص = ٣

٣ ∵ (س$^{٣}$ ، |ص|) = (٨ ، ٣)

∴ س$^{٣}$ = ٨ ، |ص| = ٣

س = ٢ ، ص = ±٣

٤ ∵ $\left(\frac{١}{س} ، ص^{-٣}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢٧}\right)$

∴ $\frac{١}{س} = \frac{١}{٢}$ ، $ص^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

∴ ص$^{٣}$ = ٢٧

∴ س = ٢ ، ∴ ص = ٣

٥ ∵ $\left(\sqrt[٣]{س} ، ٢٥\right)$ = (٨ ، ص$^{٢}$)

∴ $\sqrt[٣]{س}$ = ٨ ، ص$^{٢}$ = ٢٥ = (±٥)$^{٢}$

∴ س = ٥١٢ ، ص = ±٥

٦ ∵ (س + ص ، −٦) = (٢ ، −٣ س)

∴ −٣ س = −٦ ، ∵ س + ص = ٢

∴ س = ٢ ، ∵ ٢ + ص = ٢

∴ ص = ٠

## سؤال ١

**أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى إذا كان:**

١ (س − ٢ ، ٣) = (٥ ، ص + ١)

٢ (س$^{٢}$ + ١ ، ٧) = (١٧ ، ص$^{٣}$ − ١)

٣ $\left(\frac{٢}{س} ، ٣\right) = \left(\frac{٢}{٣} ، \frac{ص}{٢}\right)$

٤ (س$^{٥}$ ، |ص|) = (٣٢ ، ١)

٥ (٣ ، س − ٢) = (٣ ص + س ، ٤)

٦ $\left(س^{٢} − ١ ، \sqrt[٣]{ص}\right)$ = (ص ، ٢)

## ثانيًا حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين وتمثيله:

١ حاصل الضرب الديكارتى للمجموعتين المنتهيتين وغير الخاليتين س ، ص على الترتيب

يرمز له بالرمز س × ص ، تقرأ س ضرب ص

- هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى: مسقطها الأول عنصر ينتمى إلى س

ومسقطها الثانى عنصر ينتمى إلى ص

أى أن: س × ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص}

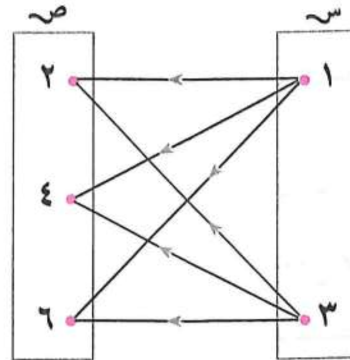
فمثلًا: إذا كانت: س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

فإن: س × ص = {١ ، ٣} × {٢ ، ٤ ، ٦}

= {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}

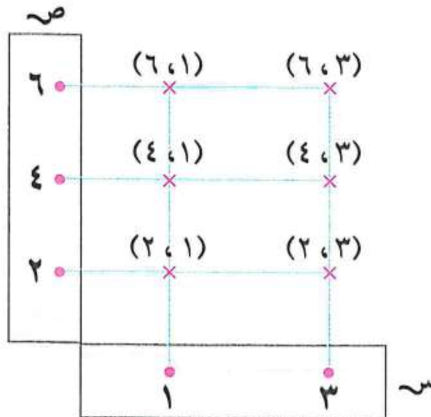
- ويمكن تمثيل س × ص بمخطط سهمى أو بمخطط بيانى (ديكارتى) كالتالى:

المخطط السهمى




- نرسم أسهمًا من كل عنصر من عناصر س إلى كل عنصرمن عناصر ص

المخطط البيانى (الديكارتى)




- نضع عناصر المجموعة س أفقيًا وعناصر المجموعة ص رأسيًا
- الأزواج المرتبة تنتج من كل نقطة من نقاط تقاطع الخطوط الأفقية والرأسية

٢ حاصل الضرب الديكارتى للمجموعتين ص ، س على الترتيب

يرمز له بالرمز ص × س ، تقـرأ ص ضرب س

- هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى: مسقطها الأول عنصر ينتمى إلى ص ومسقطها الثانى عنصر ينتمى إلى س

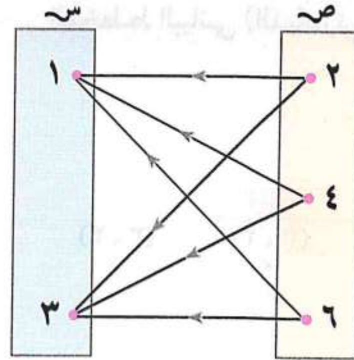
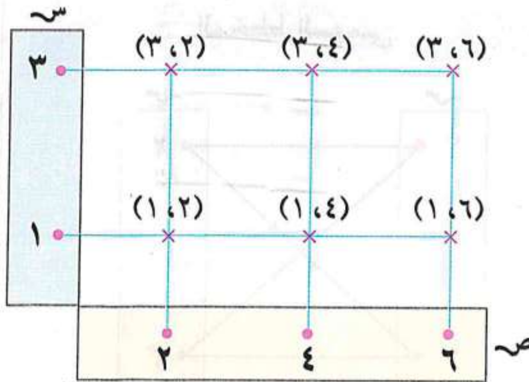
أى أن: ص × س = {(حـ ، ء) : حـ ∈ ص ، ء ∈ س}

**فمثلًا:** إذا كانت: س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

فـإن: ص × س = {٢ ، ٤ ، ٦} × {١ ، ٣}

= {(٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣)}

- ويمكن تمثيل ص × س بمخطط سهمى أو بمخطط بيانى (ديكارتى) كالتالى:

| المخطـط السهمـى | المخطـط البيانـى (الديكارتى) |
|---|---|
|  |  |





## نقاط هامة

- إذا كان: س ≠ ص فـإن: س × ص ≠ ص × س
- إذا كان: س = ص فـإن: س × ص = ص × س
- س × ∅ = ∅ × س = ∅
- إذا كان: (ك ، م) ∈ س × ص فـإن: ك ∈ س ، م ∈ ص

**فمثلًا:** إذا كان: (١ ، ٢) ∈ س × ص فـإن: ١ ∈ س ، ٢ ∈ ص

## ٣ حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة س فى نفسها

- **إذا كانت:** س مجموعة غير خالية فإن الحاصل الديكارتى للمجموعة س فى نفسها

يرمز له بالرمز س × س أو $س^{٢}$ ، تقرأ س اثنين

- هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى: مسقطها **الأول** عنصر ينتمى إلى س

ومسقطها **الثانى** عنصر ينتمى إلى س

**أى أن:** س × س = $س^{٢}$ = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س}

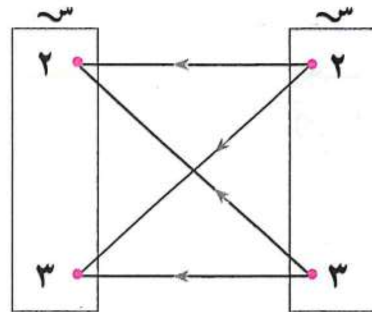
**فمثلاً:** **إذا كانت:** س = {٢ ، ٣}

**فإن:** س × س = {٢ ، ٣} × {٢ ، ٣}

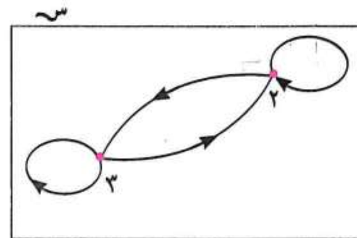
= {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

- **ويمكن تمثيل س × س بمخطط سهمى أو بمخطط بيانى (ديكارتى) كالتالى:**

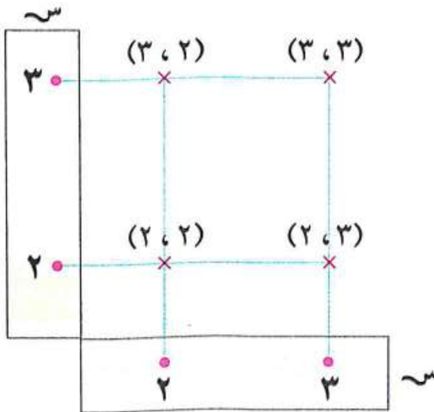
**المخطط السهمى**




**أو**




**المخطط البيانى (الديكارتى)**




**لاحظ أن:** الشكل ◯ يسمى (عروة)

وتدل على أن السهم خرج من العنصر إلى نفسه.

## مثـال ٢

إذا كانت: س = {١ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٢ ، ٤} فأوجد:

١ س × ص ٢ ص × س ٣ $س^٢$ ٤ $ص^٢$

**الحـل**

١ س × ص = {١ ، ٣ ، ٥} × {٢ ، ٤}

= {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٤)}

٢ ص × س = {٢ ، ٤} × {١ ، ٣ ، ٥}

= {(٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥)}

٣ $س^٢$ = {١ ، ٣ ، ٥} × {١ ، ٣ ، ٥}

= {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥)}

٤ $ص^٢$ = {٢ ، ٤} × {٢ ، ٤}

= {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤)}

### سؤال ٢

١ إذا كانت: س = {٣ ، ٧} ، ص = {أ ، ب ، حـ} فأوجد كلًّا من:

( أ ) س × ص (ب) ص × س

(جـ) $ص^٢$ ( د ) س × ∅

٢ إذا كانت: س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥} فأوجـد س × ص ومثله بـ:

( أ ) المخطط السهمى.

(ب) المخطط البيانى.

٣ إذا كانت: س = {٣ ، ٤ ، ٨} فأوجد: س × س ومثله بمخطط سهمى.

## مثال ٣

إذا كان: صـ × سـ = {(٣ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٥)} فأوجد كلًّا من سـ ، صـ

**الحـل**

∵ صـ × سـ = {(أ ، ب) : أ ∈ صـ ، ب ∈ سـ}

∴ سـ = {٥ ، ١}    عناصر سـ تُمثل المسقط الثانى بدون تكرار

∴ صـ = {٣ ، ٦}    عناصر صـ تُمثل المسقط الأول بدون تكرار

### عدد العناصر :

**إذا رمزنا لعدد عناصر أى مجموعة بالرمز ں وكانت سـ ، صـ مجموعتين، فـإن:**

١ ں (سـ) = عدد عناصر المجموعة سـ    ٢ ں (صـ) = عدد عناصر المجموعة صـ

٣ ں (سـ × صـ) = ں (صـ × سـ) = ں (سـ) × ں (صـ)

٤ ں (سـ × سـ) = ں ($سـ^٢$) = $(ں (سـ))^٢$

٥ ں (سـ × ∅) = ں (∅ × سـ) = صفر

## مثال ٤

إذا كانت سـ = {٣ ، ٤ ، ٥} ، صـ = {٥ ، ٦} فأوجد كلًّا من:

١ ں (سـ × صـ)    ٢ ں ($صـ^٢$)

**الحـل**

١ ∵ ں (سـ × صـ) = ں (سـ) × ں (صـ)    ∴ ں (سـ × صـ) = ٣ × ٢ = ٦

٢ ∵ ں ($صـ^٢$) = $[ں (صـ)]^٢$    ∴ ں ($صـ^٢$) = $٢^٢$ = ٤

### سؤال ٣

أكمل:

١ إذا كان (٢ ، ٣) ∈ {٢ ، ٥} × {س ، ٤}    فإن: س = ..............

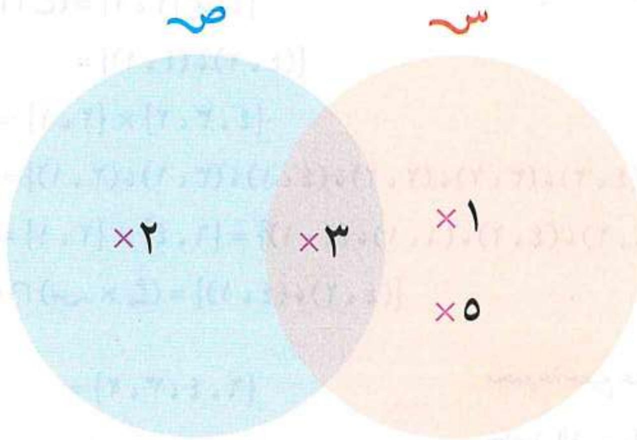
٢ إذا كانت: سـ = {-٢ ، ٢} ، ں (صـ) = ٣    فإن: ں (سـ × صـ) = ..............

٣ إذا كانت: ں (سـ) = ٥ ، ں (سـ × صـ) = ١٥    فإن: ں (صـ) = ..............

٤ إذا كانت: ں (سـ) = ٤ ، ں ($صـ^٢$) = ٩    فإن: ں (سـ × صـ) = ..............

## تذكر العمليات على المجموعات :

إذا كانت سـ = {١ ، ٣ ، ٥} ، صـ = {٢ ، ٣} فإن:




سـ ∩ صـ = مجموعة العناصر التى تنتمى إلى المجموعتين سـ و صـ معًا = {٣}

سـ ∪ صـ = مجموعة العناصر التى تنتمى إلى المجموعة سـ أو المجموعة صـ أو كلتيهما معًا

= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥}

سـ − صـ = مجموعة العناصر التى تنتمى للمجموعة سـ ولا تنتمى إلى المجموعة صـ = {١ ، ٥}

صـ − سـ = مجموعة العناصر التى تنتمى للمجموعة صـ ولا تنتمى إلى المجموعة سـ = {٢}

## مثال ٥

إذا كانت: سـ = {١ ، ٢} ، صـ = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ع = {٤ ، ٦}

فمثِّل المجموعات سـ ، صـ ، ع بشكل فن، ثم أوجد:

١ سـ × (صـ ∩ ع) ، (سـ × صـ) ∩ (سـ × ع)

٢ سـ × (صـ ∪ ع) ، (سـ × صـ) ∪ (سـ × ع)

٣ سـ × (ع − صـ) ، (سـ × ع) − (سـ × صـ)

**الحـل**

س ص ع

١ ٢ ٣ ٤ ٦

١ ∵ ص ∩ ع = {٤}

∴ س × (ص ∩ ع) = {١ ، ٢} × {٤}

= {(١ ، ٤) ، (٢ ، ٤)}

، س × ص = {١ ، ٢} × {٢ ، ٣ ، ٤}

س × ص = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}

س × ع = {١ ، ٢} × {٤ ، ٦} = {(١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦)}

∴ (س × ص) ∩ (س × ع) = {(١ ، ٤) ، (٢ ، ٤)}

٢ ∵ ص ∪ ع = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} — مجموعة جميع عناصر ص ، ع دون تكرار

∴ س × (ص ∪ ع) = {١ ، ٢} × {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} — حاصل الضرب الديكارتى للمجموعتين س ، (ص ∪ ع)

= {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦)}

∴ (س × ص) ∪ (س × ع)

= {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦)}

٣ ∵ ع − ص = {٦}

∴ س × (ع − ص) = {١ ، ٢} × {٦}

= {(١ ، ٦) ، (٢ ، ٦)}

∴ (س × ع) − (س × ص) = {(١ ، ٦) ، (٢ ، ٦)}

**نقاط هامة**

- س × (ص ∩ ع) = (س × ص) ∩ (س × ع)
- س × (ص ∪ ع) = (س × ص) ∪ (س × ع)
- س × (ع − ص) = (س × ع) − (س × ص)

**سؤال ٤**

من المثال السابق أوجد:

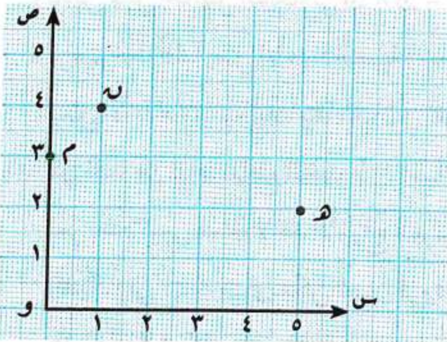
① س × (ص − ع) ② (س × ص) − (س × ع) ③ (ع − ص) × (س ∪ ص)

## ثالثًا حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين وتمثيله:

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعات غير المنتهية مثل ط × ط ، ص × ص ، ه × ه ، ع × ع هو مجموعة من الأزواج المرتبة غير المنتهية أيضًا ويمكن تمثيلها من خلال الشبكة البيانية المتعامدة كما يلى:

### ١ الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ط × ط = ط$^2$

- لتمثيل الحاصل الديكارتى ط × ط = {(س ، ص) : س ∈ ط ، ص ∈ ط}




نمثل الأعداد الطبيعية على شعاعين متعامدين أحدهما أفقى $\overrightarrow{\text{و س}}$ والآخر رأسى $\overrightarrow{\text{و ص}}$ ومتقاطعين فى نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

- الشكل المقابل يمثل جزءًا من الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتى ط × ط

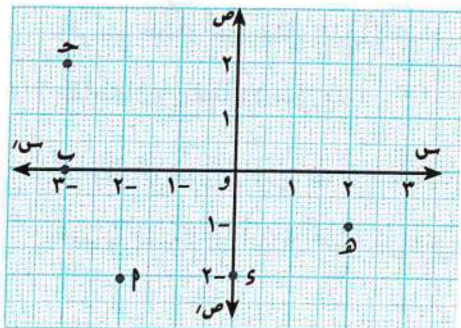
- كل نقطة من نقاط التقاطع لهذه الشبكة تمثل زوجًا مرتبًا ينتمى إلى ط × ط

**فمثلًا:** ١ النقطة ں تمثل الزوج المرتب (١ ، ٤)

٢ النقطة م تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٣)  ٣ النقطة ه تمثل الزوج المرتب (٥ ، ٢)

### ٢ الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ص × ص = ص$^2$

- لتمثيل الحاصل الديكارتى ص × ص = ص$^2$ = {(س ، ص) : س ∈ ص ، ص ∈ ص}




نرسم خطًا أفقيًا $\overleftrightarrow{\text{س س/}}$ يمثل الأعداد الصحيحة وخطًا رأسيًا $\overleftrightarrow{\text{ص ص/}}$ يمثل أيضًا الأعداد الصحيحة ويتقاطعان فى نقطة و (٠ ، ٠)

- يعرف هذا الشكل بالمستوى الإحداثى ص × ص ، أو الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ص × ص

• تمثل كل نقطة من نقاط هذه الشبكة زوجًا مرتبًا ينتمى إلى ص × ص

فمثلًا: ١ النقطة م تُمثل الزوج المرتب (−٢ ، −٢) ٢ النقطة حـ تُمثل الزوج المرتب (−٣ ، ٢)

٣ النقطة ب تُمثل الزوج المرتب (−٣ ، ٠) ٤ النقطة هـ تُمثل الزوج المرتب (٢ ، −١)

٥ النقطة ء تُمثل الزوج المرتب (٠ ، −٢)

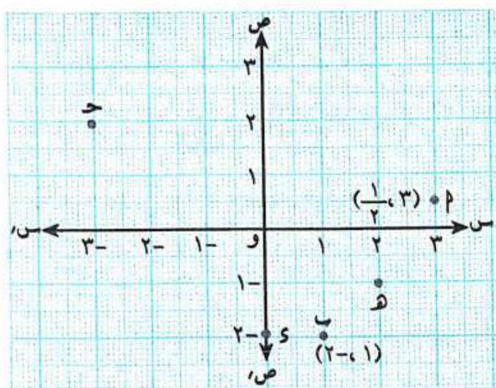
## ٣ الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ن × ن = ن$^2$

ويمكن تمثيل الحاصل الديكارتى ن × ن = ن$^2$ = {(س ، ص) : س ∈ ن ، ص ∈ ن} كالآتى:

• نرسم خطًا أفقيًا يمثل الأعداد النسبية وخطًا رأسيًا يمثل الأعداد النسبية أيضًا يتقاطعان فى نقطة و (٠ ، ٠)

• كل نقطة من نقاط تقاطع الخطوط الرأسية والأفقية التى تمر بعدد نسبى ممثلة لأحد الأزواج المرتبة للحاصل الديكارتى ن × ن ويمكن تعيين أزواج مرتبة على هذه الشبكة.

• مثل م $\left(٣ ، \frac{١}{٢}\right)$ ، ب (١ ، −٢) ، حـ (−٣ ، ٢) وغيرها




من النقط مع ملاحظة صعوبة إظهار جميع النقط نظرًا لكثافة الأعداد النسبية.

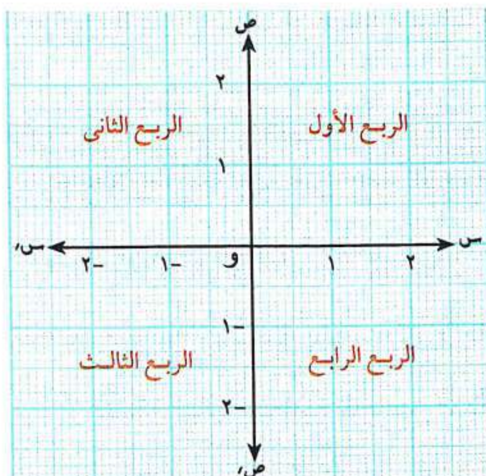
## ٤ الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ح × ح = ح$^2$

• يمكن تمثيل الحاصل الديكارتى ح × ح = ح$^2$ = {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}

وهو عبارة عن سطح منطقة ممتدة بلا حدود من جميع الاتجاهات كما بالشكل التالى:

• نرســم خطًا أفقيًــا يمثل جميــع الأعــداد الحقيقية ونرسم خطًا رأسيًا يمثل جميع الأعداد الحقيقية أيضًا، يتقاطعان فى نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

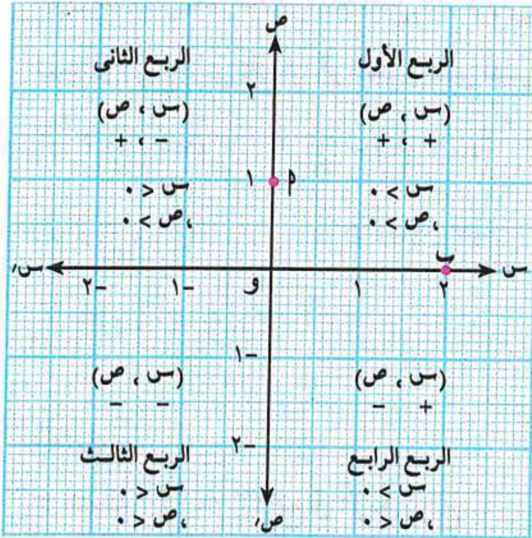
• نلاحظ أن محورى السينات والصادات يقسمان الشبكة إلى أربعة أقسام كل منها يسمى ربعًا.





## نقاط هامة

- يمكن التعرف على الربع الذى تقع فيه أى نقطة من إشارتى إحداثييها كما بالشكل.




**إذا كان الإحداثى السينى للنقطة = صفر**

**فإن النقطة تقع على محور الصادات.**

**مثل النقطة ٢ (٠ ، ١)**

**إذا كان الإحداثى الصادى للنقطة = صفر**

**فإن النقطة تقع على محور السينات.**

**مثل النقطة ٮ (٢ ، ٠)**

## مثال ٦

١ إذا كانت النقطة (٢ − ٣ ، ٤) تقع على محور الصادات **فأوجد قيمة ٢**

٢ إذا كانت النقطة (٥ ، ٢٢ − ٨) تنتمى إلى محور السينات **فأوجد قيمة ٢**

### الحل

١ ∵ النقطة (٢ − ٣ ، ٤) تقع على محور الصادات

∴ الإحداثى السينى = صفر

∴ ٢ − ٣ = صفر ∴ ٢ = ٣

٢ ∵ النقطة (٥ ، ٢٢ − ٨) تنتمى إلى محور السينات

∴ الإحداثى الصادى = صفر

∴ ٢٢ − ٨ = صفر ∴ ٢٢ = ٨ ∴ ٢ = ٤

## مثال ٧

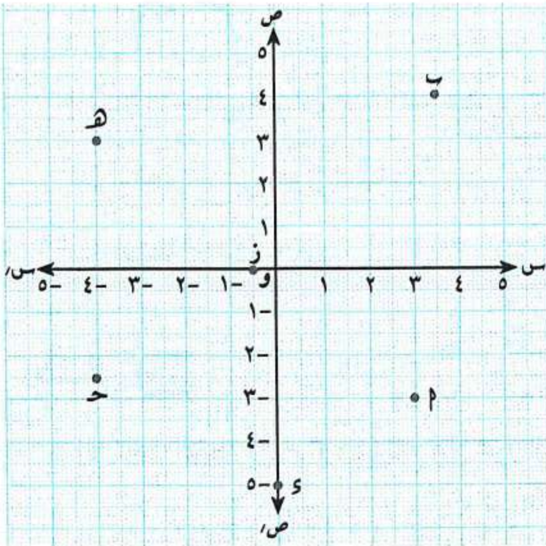
كوِّن شبكة تربيعية متعامدة للحاصل الديكارتى ع × ع

ثم اذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تنتمى إليه كلٌّ من النقاط الآتية:

١ أ (٣ ، -٣) ٢ ب ($٣\frac{١}{٢}$ ، ٤) ٣ حـ (-٤ ، -$٢\frac{١}{٢}$)

٤ ء (٠ ، -٥) ٥ هـ (-٤ ، ٣) ٦ ز (-$\frac{١}{٢}$ ، ٠)

٧ و (٠ ، ٠)




### الحل

١ النقطة أ (٣ ، -٣) تقع فى الربع الرابع.

٢ النقطة ب ($٣\frac{١}{٢}$ ، ٤) تقع فى الربع الأول.

٣ النقطة حـ (-٤ ، -$٢\frac{١}{٢}$) تقع فى الربع الثالث.

٤ النقطة ء (٠ ، -٥) تنتمى إلى محور الصادات.

٥ النقطة هـ (-٤ ، ٣) تقع فى الربع الثانى.

٦ النقطة ز (-$\frac{١}{٢}$ ، ٠) تنتمى إلى محور السينات.

٧ النقطة و (٠ ، ٠) تنتمى لكل من محورى السينات والصادات معًا (نقطة الأصل)

أو نقطة تقاطع محورى الإحداثيات.

## سؤال ٥

أكمل الجدول التالى بكتابة الربع الذى تقع فيه النقطة أو المحور الذى تنتمى إليه النقطة:

| النقطة | (٢ ، -٣) | ($\frac{١}{٢}$ ، ٤) | (٠ ، -٢) | (-٣ ، ١,٥) | (٤ ، ٠) | (-٣ ، -٢) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الربع أو المحور | .......... | .......... | .......... | .......... | .......... | .......... |






## حاصل الضرب الديكارتى

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

**تدريبات الأضـــواء**

## أولًا تساوى زوجين مرتبين:

### ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت (س − ٢ ، ٣) = (٥ ، ٣) فإن س = ............ (شمال سيناء ٢٠١٩)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ إذا كان (أ ، ٥) = (٦ ، ب) فإن أ + ب = ............ (السويس ٢٠١٩)

(أ) ٥ (ب) ١١ (جـ) ٦ (د) ١

٣ إذا كانت (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ص + س) فإن س + ص = ............ (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) −٤ (د) ٦

٤ إذا كانت (س − ٢ ، ٣) = (٥ ، س + ص) فإن س − ص = ............ (كفر الشيخ ٢٠١٩)

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) −١١ (د) ١١

٥ إذا كان (س − ١ ، ٢$^{ص}$) = (١ ، ٨) فإن (س ، ص) = ............ (مطروح ٢٠١٩)

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٠ ، −٣)

٦ إذا كان (س + ٢ ، ص) = (٢ ، ٣) فإن س$^{٥}$ص + ١ = ............ (بورسعيد ٢٠١٩)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١

٧ إذا كان (أ − ٧ ، ٢٦) = (−٣ ، ب$^{٣}$ − ١) فإن $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$ = ............ (الغربية ٢٠١٩)

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ±٥ (د) ±٧

٨ إذا كان (أ$^{٢}$ − ب$^{٢}$ ، ٤) = (١٦ ، أ − ب) فإن أ + ب = ............

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٩

٩ إذا كان (س$^{٣}$ ، ص + ١) = (٨ ، ٣)، فإن $\sqrt[٣]{\text{س} + ٣\text{ص}}$ = ............

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ١٦

١٠ إذا كانت (س$^{٦}$ ، ١٠$^{ص-٣}$) = (٦٤ ، ١)، فإن قيمة س ص = ............ (موقع الوزارة)

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ±٦ (د) ١

## ٢ أوجد قيم أ ، ب ، س ، ص فى كل مما يأتى:

١ (أ ، ب) = (–٥ ، ٩)

٢ (٦ ، ب – ٣) = (٢ – أ ، –١)

٣ (أ – ٢ ، ب + ١) = (٢ ، –٣)

٤ (٣س–١ ، ٢٧) = (٥ ، ص$^{٣}$) (الفيوم ٢٠١٩)

٥ (س$^{٢}$ – ١ ، ص$^{٣}$ – ٣) = (٨ ، ٢٤)

٦ $\left(\sqrt{س} ، \frac{١}{ص - ٢}\right)$ = (٦ ، ٤)

## ثانيًا حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين وتمثيله:

## ٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ لأى مجموعتين أ ، ب تعبر المجموعة {(س ، ص): س ∈ أ ، ص ∈ ب} عن ......... (الدقهلية ٢٠١٦)

(أ) ن (أ × ب) (ب) أ × ب (جـ) ن (ب × أ) (د) ب × أ

٢ {٣} × {٥} = ..................

(أ) {١٥} (ب) {(٣ ، ٥)} (جـ) (٣ ، ٥) (د) {٣ ، ٥}

٣ إذا كان (٩ ، ٤) ∈ {٩ ، ٧} × {س ، ٥} فإن س = ..................

(أ) ٩ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٥

٤ إذا كانت س = {١ ، ٢}، ص = {٣ ، ٤}، فإن (٣ ، ٤) ∈ .................. (قنا ٢٠٢٣)

(أ) س × ص (ب) ص × س (جـ) ص (د) ص$^{٢}$

٥ إذا كانت س = {٥ ، ٦ ، ٧}، فإن ن (س$^{٢}$) = .................. (القليوبية ٢٠١٩)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٦ إذا كانت س = {٣}، فإن ن (س$^{٢}$) = .................. (قنا ٢٠٢٠)

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) {٣ ، ٣} (د) ٣

٧ إذا كانت س = {٣ ، ٢}، فإن ∅ × س = ..................

(أ) ∅ (ب) س (جـ) (٣ ، ٢) (د) {٠}

٨ إذا كان ن (س) = ٢ ، ص = {٣}، فإن ن (س × ص) = .................. (المنيا ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

٩ إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين وكان: ن (س$^{٢}$) = ٤ ، ن (س × ص) = ٦ ،
فإن ن (ص$^{٢}$) = .................. (الجيزة ٢٠٢٠)

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٦ (د) ١٢

١٠ إذا كانت سـ ، صـ مجموعتين غير خاليتين وكان سـ × صـ = صـ × سـ ، فإن ..............

(أ) سـ ≠ صـ (ب) سـ = صـ (جـ) سـ ⊅ صـ (د) صـ ⊅ سـ

١١ إذا كان ن (سـ) = ن (سـ × صـ)، فإن: ن (صـ) = .............. (دمياط ٢٠١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٢ إذا كانت سـ × صـ = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤)} فإن ن (سـ) + ن (صـ^٢) = ......... (الفيوم ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ١٠

١٣ إذا كان أ ∈ سـ^٢ حيث سـ = {س : ٥ < س < ٧، س ∈ ط}، فإن أ هى ......... (الشرقية ٢٠٢٠)

(أ) ٣٦ (ب) {٣٦} (جـ) (٦ ، ٦) (د) [٥ ، ٧]

١٤ إذا كان {٢} × {س ، ص} = {(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}، فإن (س − ص)^٢ = ............ (كفرالشيخ ٢٠٢٠)

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ±١ (د) صفر

١٥ إذا كانت سـ = {−١} ، ن (سـ) − ن (صـ) = ١ ، فإن صـ × سـ = ..............

(أ) صفر (ب) {(−١ ، −١)} (جـ) ∅ (د) {(١ ، −١)}

١٦ إذا كانت سـ ، صـ مجموعتين بحيث ن(سـ × صـ) = ١١

فإن ن (سـ) + ن (صـ) = .............. (الدقهلية ٢٠٢٣)

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

١٧ إذا كانت (سـ − صـ) × صـ = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣)} ، ن (سـ × صـ) = ٦ فإن سـ = .........

(أ) {١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {١ ، ٣ ، ٦} (د) {١ ، ٢ ، ٣}

---

٤ إذا كانت سـ = {٣ ، ٤} ، صـ = {٢ ، ٥ ، ٧} فأوجد:

١ سـ × صـ ٢ صـ × سـ ٣ سـ × سـ ٤ صـ^٢

ومثل كلًا منها بمخطط سهمى وآخر بيانى.

---

٥ إذا كانت سـ = {١ ، ٢}، صـ = {٣ ، ٤ ، ٥} فأوجد: (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

١ سـ × صـ ومثلها بيانيًا. ٢ ن(صـ^٢)

---

٦ إذا كانت سـ × صـ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧)} فأوجد: (البحر الأحمر ٢٠٢٠)

١ صـ ٢ سـ^٢

٧ إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٥} ، ع = {٤ ، ٥} فأوجد: (السويس ٢٠١٩)

١ ن (س × ص)　　٢ (ص ∩ ع) × س

---

٨ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٧ ، ٢} فأوجد: (الشرقية ٢٠١٩)

١ (س ∩ ص) × ع　　٢ (س − ص) × ع

---

٩ إذا كانت س = {٢ ، −١} ، ص = {٤ ، ٠} ، ع = {٤ ، ٥ ، −٢} فمثل المجموعات س ، ص ، ع بشكل ڤن ثم أوجد :

١ س × ص　　٢ ص × ع　　٣ $س^٢$

٤ ن (س × ع)　　٥ ن ($ص^٢$)　　٦ ن ($ع^٢$)

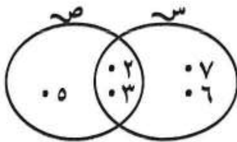
---

١٠ إذا كانت س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٣ ، ٥} فأوجد: (الشرقية ٢٠٢٢)

١ (س − ع) × ص　　٢ ن [(ع ∩ ص) × س]

---

١١ من الشكل المقابل أوجد كلًّا من:




١ (س ∩ ص) × ص

٢ (ص − س) × (س − ص)

---

١٢ إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٣} ، فأوجد: (الشرقية ٢٠٢٢)

١ س × ص　　٢ ن [(س ∪ ص) × (ص − س)]

---

١٣ إذا كان س × ص = {(٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤)} فأوجد كلًّا من:

١ س ، ص　　٢ (س ∩ ص) × ص

---

١٤ إذا كان س × ص = {(٣ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٥)} فأوجد كلًّا من: (المنيا ٢٠١٥)

س ، ص ، س × ∅ ، ن (ص × ∅)

---

١٥ إذا كانت س−ص = {٣} ، ص−س = {١ ، ٥} ، س∩ص = {٦} فأوجد: (الدقهلية ٢٠١٩)

١ س ، ص　　٢ (س ∩ ص) × س

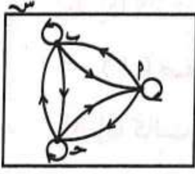
---

١٦ إذا كانت س ⊂ ص وكان ن (س × ص) = ٦ ، ٤ ∈ س ، (١ ، ٧) ∈ س × ص فأوجد:

١ س　　٢ ص　　٣ س × ص (دمياط ٢٠١٧)

١٧ المخطط السهمى المقابل يمثل $س^٢$، أوجد:

١ س ٢ $س^٢$ ٣ ى ($س^٢$)




## ثالثاً حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين وتمثيله:

١٨ اختر الإجابة الصحيحة:

١ النقطة (٣ ، −٤) تقع فى الربع .................. (الوادى الجديد ٢٠١٩)

( أ ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث ( د ) الرابع

٢ النقطة (٠ ، ٧) تقع ..................

( أ ) على محور السينات (ب) على محور الصادات

(جـ) فى الربع الأول ( د ) فى الربع الرابع

٣ النقطة .................. تقع فى الربع الثانى.

( أ ) (−١ ، ٢) (ب) (١ ، −٢) (جـ) (−١ ، −٢) ( د ) (١ ، ٢)

٤ إذا كانت النقطة (٤ ، أ − ٣) تقع على محور السينات فإن أ = .................. (بنى سويف ٢٠١٨)

( أ ) −٤ (ب) ٣ (جـ) ٤ ( د ) ٧

٥ إذا كانت النقطة (ل −٣ ، ٢) تقع فى الربع الأول فإن ل يمكن أن تساوى .................. (الدقهلية ٢٠١٩)

( أ ) −٣ (ب) ٢ (جـ) ٧ ( د ) صفر

٦ إذا كانت النقطة (س ، ص) تقع فى الربع الثانى فإن س ص .................. صفر (السويس ٢٠٢٠)

( أ ) $<$ (ب) $>$ (جـ) = ( د ) $\leq$

٧ إذا كانت النقطة (أ+١ ، أ −٢) تقع فى الربع الأول فإن أ .................. ٢ (بنى سويف ٢٠٢٣)

( أ ) = (ب) $\geq$ (جـ) $>$ ( د ) $<$

٨ إذا كانت (س + ١ ، $\sqrt[3]{٢٧}$) = (−١ ، ص) فإن النقطة (س ، ص) تقع فى الربع .................. (الفيوم ٢٠٢٠)

( أ ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث ( د ) الرابع

٩ إذا كانت أ $<$ ٥ ، فإن النقطة (٢، أ − ٥) تقع فى الربع .................. (المنوفية ٢٠٢٠)

( أ ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث ( د ) الرابع

١٠ إذا كانت النقطة (أ ، ٥ ب) ∈ $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ فإن $\frac{ب}{أ}$ = ............... (حيث أ ≠ ٠)

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٥ (د) ١

١١ إذا كانت أ < صفر ، ب > صفر، فإن النقطة التى تقع فى الربع الثانى هى ............... (الفيوم ٢٠١٨)

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

١٢ إذا كانت النقطة (ك$^{٢}$−٤ ،ك) تقع على الجزء السالب من محور الصادات، فإن ك = ........ (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) ±٢ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −٢

١٣ الزوج المرتب (س$^{٢}$ ، ص$^{٢}$) حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ يقع فى الربع ...............

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

١٤ إذا كان ( |س| ، ٤) = (٣ ، ص$^{٢}$) والنقطة (س ، ص) تقع فى الربع الرابع فإن س + ص = ...............

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٧

١٥ إذا كانت س = [٠ ، ٥] ، ص = [−٣ ، ٢[ فإن (٢ ، ٤) ∈ ............... (الدقهلية ٢٠٢١)

(أ) س$^{٢}$ (ب) ص$^{٢}$ (جـ) س × ص (د) ص × س

١٦ إذا كانت النقطة (س ، ص) تقع فى الربع الثانى، فإن النقطة (−س ، ص$^{٢}$) تقع فى الربع .......... (الشرقية ٢٠٢٣)

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

---

١٩ أوجد قيم كل من س ، ص فى الحالتين الآتيتين:

١ إذا كانت (س − ٦ ، ٤ − ص) تنتمى إلى الربع الثالث.

٢ إذا كانت (س$^{٢}$ − ١ ، ص$^{٣}$ − ٣) = (٨ ، ٢٤).




٢٠ إذا كان (س$^{٥}$ ، ١٠٠ $^{٢-س}$) = (٣٢ ، ص)، **فأوجد:** (س ، ص).

---

٢١ إذا كانت س ⊂ ص، س × ص = {(أ، ٤) ، (أ، ٦) ، (أ، ٨) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ، (٦ ، ٨)}

**فأوجد:** قيم أ

---

٢٢ إذا كان س ، ص مجموعتين غير خاليتين حيث: ن (س × ص) = ن (س) + ن (ص) ، ن (س ∩ ص) = ١ **فأوجد:** ن (س ∪ ص)

---

٢٣ إذا كان: س − ص = {١ ، ٢} ، ص − س = {٣، ٤} ، س ∩ ص = {٥، ٦}

**فأوجد:** (س × ص) ∩ (ص × س)

## تدريبات الكتاب المدرسى

### ١ أكمل ما يأتى:

١ إذا كان (أ + ٥ ، ٣) = (٨ ، ب − ١) فإن أ = ..................... ، ب = ..................... (موقع الوزارة)

٢ إذا كان (س^٥ ، ص + ١) = (٣٢ ، $\sqrt[3]{27}$) فإن س = ............... ، ص = .....................

٣ إذا كانت (س − ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فإن $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ = .....................

٤ إذا كانت ن (س^٢) = ٩ فإن ن (س) = .....................

٥ إذا كانت س × ص = {(٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٩)}

فإن س = ..................... ، ص = .....................

٦ إذا كانت ص × س = {(٢ ، ٣)، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}

فإن س = ..................... ، ص = .....................

---

### ٢ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان ن (س) = ٣، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) تساوى ..................... (القاهرة ٢٠١٨)

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

٢ إذا كان (٣ ، ٥) ∈ {٣ ، ٦} × {س ، ٨} فإن س = ..................... (الإسكندرية ٢٠٢٠)

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

٣ إذا كانت النقطة (٥ ، ب − ٧) تقع على محور السينات فإن ب = ..................... (القليوبية ٢٠٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

٤ إذا كانت النقطة (س − ٤ ، ٢ − س) حيث س ∈ ص تقع فى الربع الثالث فإن س = .....................

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦ (أسيوط ٢٠٢٣)

## ٣ أجب عما يأتى:

١ إذا كانت سـ = {٢ ، ٣} ، صـ = {٣ ، ٤ ، ٥} فأوجد:

(أ) سـ × صـ ومثله بمخطط سهمى وآخر بيانى. (الجيزة ٢٠٢٢)

(ب) ن (سـ × صـ) (جـ) ن (صـ$^{٢}$) (د) (سـ × صـ) ∩ صـ$^{٢}$

٢ إذا كان سـ × صـ = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)} فأوجد: (موقع الوزارة)

(أ) سـ ، صـ (ب) صـ × سـ (جـ) صـ$^{٢}$ (القليوبية ٢٠٢٠)

٣ إذا كان سـ = {٣ ، ٤} ، صـ = {٤ ، ٥} ، ع = {٦ ، ٥} فأوجد: (البحيرة ٢٠٢٢)

(أ) سـ × (صـ ∩ ع) (ب) (سـ - صـ) × ع

(جـ) (سـ - صـ) × (صـ - ع)

٤ على شبكة بيانية متعامدة لحاصل الضرب الديكارتى ع × ع عين النقط الآتية:

أ (٤ ، ٥) ، ب (٦ ، -٣) ، حـ (-٢ ، ٧) ، ء (-١ ، ٦) ، هـ (-٤ ، -٥)، م (٠ ، ٦)، ك (٩ ، ٠)،

ثم اذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تنتمى إليه كلٌّ من هذه النقاط.

٥ إذا كانت سـ = {١ ، ٥ ، ٦} ، صـ = {٢ ، ٤ ، ٥} فأوجد:

(أ) سـ × صـ

(ب) صـ × سـ ومثله بمخطط سهمى وآخر بيانى.

(جـ) ن (سـ × صـ)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت ($٢^{س}$ ، $\sqrt{ص}$) = (١ ، ١) فإن س − ص = .................. (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ± ١

٢ إذا كانت س = {٣} ، ن (ص) = ٥ فإن ن (س × ص) = .................. (القاهرة ٢٠١٩)

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٥

٣ إذا كانت النقطة (س ، ١) تقع على محور الصادات فإن ٢س + ٣ = .................. (الأقصر ٢٠١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ إذا كانت س × ص = {(١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)} فإن س ∩ ص = .......... (الشرقية ٢٠١٩)

(أ) {١ ، ٢} (ب) {(٣ ، ٤)} (جـ) ∅ (د) {(١ ، ٤)}

٥ إذا كانت س = {١ ، ٢}، ص = {٥ ، ٦} فإن (٥ ، ١) ∈ .................. (المنوفية ٢٠١٩)

(أ) ص × س (ب) $س^{٢}$ (جـ) س × ص (د) $ص^{٢}$

٦ النقطة (٢ ، −٤) تقع فى الربع .................. (بورسعيد ٢٠٢٥)

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

---

## ٢ أسئلة مقالية:

١ إذا كان أ = {١} ، ب = {٢ ، ٣}، حـ = {٢ ، ٥ ، ٦} فأوجد: (القليوبية ٢٠١٨)

(أ) أ × ب (ب) أ × (ب ∩ حـ)

٢ إذا كانت س × ص = {(٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩)} فأوجد: (السويس ٢٠١٩)

(أ) س ، ص (ب) ص × ص

٣ إذا كانت ($س^{٣}$ ، ص + ١) = (٢٧ ، $\sqrt[٣]{١٢٥}$)، فأوجد قيمة كل من س، ص (جنوب سيناء ٢٠١٩)

٤ إذا كان (٣ − س، ص + ٢) = (−٤ ، ٤)، فأوجد قيمة $\sqrt{س + ص}$ (الدقهلية ٢٠١٨)

٥ إذا كانت س = {٢ ، ٣} ، ص = {أ ، ب ، حـ} ، فأوجد: س × ص، $س^{٢}$، ن ($ص^{٢}$) (سوهاج ٢٠١٨)

٦ إذا كان (س − ٢ ، $٣^{ص-١}$) = (٣ ، ١)، فما قيمة س، ص؟ (الدقهلية ٢٠٢٠)



ذاكر الدرس ٣

# العلاقات والدوال

فيديو الشرح



## فكر وناقش

**إذا كانت:** سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {٢ ، ٦ ، ٨}

**فـإن:** سـ × صـ = {(١ ، ٢)، (١ ، ٦)، (١ ، ٨)، (٢ ، ٢)، (٢ ، ٦)، (٢ ، ٨)، (٣ ، ٢)، (٣ ، ٦)، (٣ ، ٨)}

• وإذا أردنا أن نربط بعض أو كل عناصر سـ ببعض أو كل عناصر صـ من الأزواج المرتبة الناتجة بحيث يكون المسقط الأول نصف المسقط الثانى فنجد أننا حصلنا على مجموعة جزئية من سـ × صـ

وهى {(١ ، ٢)، (٣ ، ٦)} ⊂ سـ × صـ

## أولًا العلاقات:

### تعريف

• **العلاقة من المجموعة غير الخالية سـ إلى المجموعة غير الخالية صـ**

هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى سـ × صـ وسنرمز لها بالرمز ع

• **بيـان العـلاقـة:** هو مجموعة الأزواج المرتبة التى تحدد العلاقة.

**فمثلًا:** إذا كانت سـ = {١ ، ٢}، صـ = {أ ، ب}

فإن سـ × صـ = {(١ ، أ)، (١ ، ب)، (٢ ، أ)، (٢ ، ب)}

• بالتالى فإن أى مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتى سـ × صـ تمثل علاقة من سـ إلى صـ مثل:

$ع_١$ = {(١ ، أ)، (١ ، ب)}

$ع_٢$ = {(١ ، ب)، (٢ ، أ)، (١ ، أ)}

$ع_٣$ = {(١ ، أ)، (١ ، ب)، (٢ ، أ)، (٢ ، ب)}

$ع_٤$ = {(٢ ، ب)}

$ع_٥$ = ∅



## نقاط هامة

- العلاقة ع من س إلى ص تربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص
- بيان العلاقة ع من س إلى ص هو مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتى س × ص

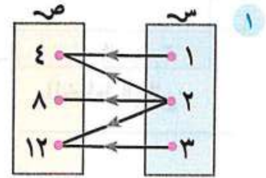
أى أن: بيان ع ⊂ س × ص

- يمكن تمثيل العلاقة ع بواسطة مخطط سهمى أو مخطط بيانى.
- لكل (أ ، ب) ∈ بيان ع نكتب: أ ع ب ونعنى بذلك أن العنصر أ مرتبط بالعلاقة ع مع العنصر ب
- إذا كان (أ ، ب) ∉ بيان ع فإننا نكتب: أ ع̸ ب

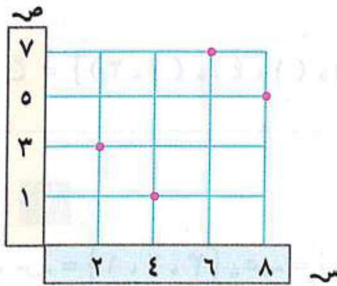
## مثال ١

المخططات التالية تُمثل العلاقة ع من س إلى ص، اكتب بيان ع لكل مخطط.

١




٢




### الحــل

١ بيان ع = {(١ ، ٤)، (٢ ، ٤)، (٢ ، ٨)، (٢ ، ١٢)، (٣ ، ١٢)}

٢ بيان ع = {(٢ ، ٣)، (٤ ، ١)، (٦ ، ٧)، (٨ ، ٥)}

## سؤال ١

إذا كانت س = {٤ ، ٥ ، ٧} ، ص = {١ ، ٣}

فبين أى المجموعات الآتية تكون علاقة من س إلى ص مع ذكر السبب.

١ $ع_١$ = {(٤ ، ٣)، (٧ ، ١)، (٥ ، ٣)}

٢ $ع_٢$ = {(٧ ، ١)، (٣ ، ٧)، (٤ ، ٣)}

## مثال ٢

إذا كانت س = { ٢ ، ٤ }، ص = { ١ ، ٢ ، ٤ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن «أ > ب» لكل أ ∈ س ، لكل ب ∈ ص فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.

**الحل**

∵ ٢ > ١ ∴ ٢ ع ١ ∴ (٢ ، ١) ∈ بيان ع

، ∵ ٢ ≯ ٢ ∴ ٢ ع̸ ٢ ∴ (٢ ، ٢) ∉ بيان ع

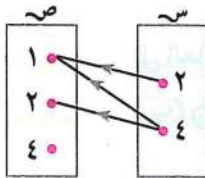
، ∵ ٢ ≯ ٤ ∴ ٢ ع̸ ٤ ∴ (٢ ، ٤) ∉ بيان ع

، ∵ ٤ > ١ ∴ ٤ ع ١ ∴ (٤ ، ١) ∈ بيان ع

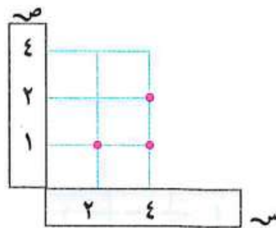
، ∵ ٤ > ٢ ∴ ٤ ع ٢ ∴ (٤ ، ٢) ∈ بيان ع

، ∵ ٤ ≯ ٤ ∴ ٤ ع̸ ٤ ∴ (٤ ، ٤) ∉ بيان ع

∴ بيان ع = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) }



المخطط السهمى



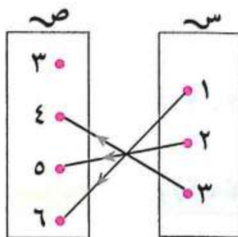
المخطط البيانى

## مثال ٣

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ }، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن «أ + ب = ٧» لكل أ ∈ س ، لكل ب ∈ ص فاكتب بيان ع ومثلها بواسطة مخطط سهمى.

**الحل**

بيان ع = { (١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤) }



المخطط السهمى

### سؤال ٢

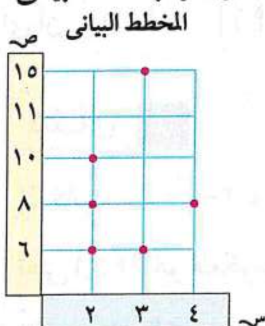
إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن: «أ + ب = عددًا أوليًّا» لكل أ ∈ س ، لكل ب ∈ ص

فاكتب بيان ع كمجموعة أزواج مرتبة ومثلها بمخطط سهمى.

## مثـال ٤

إذا كانت سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = { ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث أ ع ب تعنى أن «أ تقسم ب» لكل أ ∈ سـ ، لكل ب ∈ صـ، **فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى.**




### الحـل

∵ «أ تقسم ب» تعنى أن ب تقبل القسمة على أ بدون باقٍ

∴ بيان ع = {(٢ ، ٦)، (٢ ، ٨)، (٢ ، ١٠)، (٣ ، ٦)، (٣ ، ١٥)، (٤ ، ٨)}

## مثـال ٥

إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {١٢ ، ٢١ ، ٤٧ ، ٥٢}

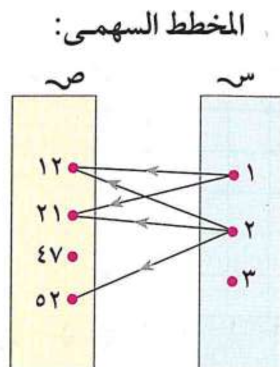
ولدينا العلاقة ع من سـ إلى صـ حيث إن أ ع ب تعنى أن «أ أحد رقمى العدد ب» ، لكل أ ∈ سـ،

لكل ب ∈ صـ **فاكتب بيان ع كمجموعة أزواج مرتبة ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.**

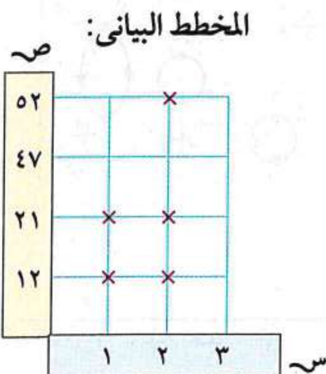
### الحـل

بيان ع = {(١ ، ١٢)، (١ ، ٢١)، (٢ ، ١٢)، (٢ ، ٢١)، (٢ ، ٥٢)}

المخطط السهمـى:




المخطط البيانى:




## سؤال ٣

إذا كانت سـ= { ١ ، ٢ ، ٣ } ، صـ= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ } وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث أ ع ب تعنى أن: «أ عامل من عوامل ب» لكل أ ∈ سـ ، لكل ب ∈ صـ

**فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.**

**لاحظ أن:** أ عامل من عوامل ب تعنى أن « ب تقبل القسمة على أ بدون باقٍ»

## العلاقة من مجموعة إلى نفسها:

**إذا كانت:** العلاقة ع من س إلى س نقول : إن العلاقة ع معرفة على س ويكون ع ⊂ س × س

**أى أن:** بيان ع = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س ، أ ع ب}

## مثال ٦

إذا كانت س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$} وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب

**تعنى أن:** «أ هو المعكوس الضربى للعدد ب» لكل أ ∈ س ، لكل ب ∈ س

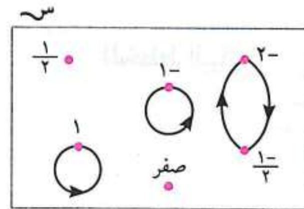
**فاكتب بيان ع كمجموعة أزواج مرتبة ومثِّلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.**

**لاحظ أن**
العدد (صفر) ليس له معكوس ضربى.

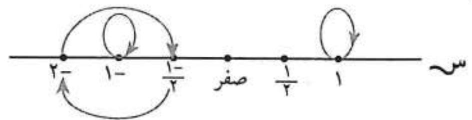
### الحـل

بيـان ع = {(-٢ ، $\frac{-١}{٢}$)، (-١ ، -١)، (١ ، ١)، ($\frac{-١}{٢}$ ، -٢)}، تمثيلها بـ :

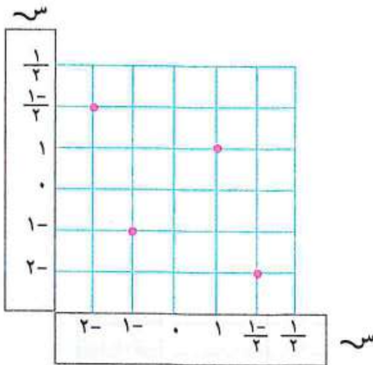
١ مخطـط سهمـى:




أو




٢ مخطـط بيانـى:




## سؤال ٤

**إذا كانت** س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢} وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب

تعنى أن: «أ هو المعكوس الجمعى للعدد ب» **فاكتب بيان ع ومثِّلها بمخطط بيانى.** (المنيا ٢٠٢٢)

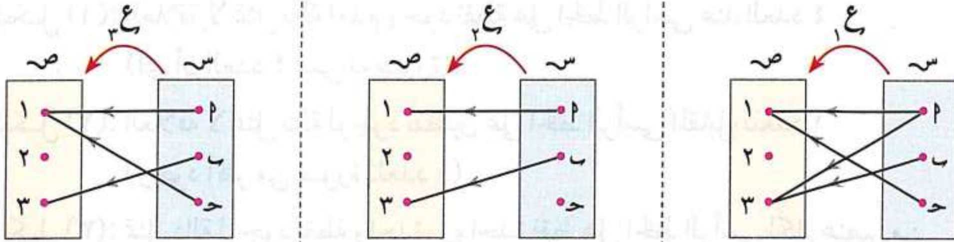
## ثانيًا الدالة (التطبيق)

### تعريـف

الـدالـة (التطبيق): لأى مجموعتين غير خاليتين س ، ص يقال للعلاقة من س إلى ص إنها دالة إذا ارتبط **كل** عنصر من عناصر س بعنصر **واحد فقط** من عناصر ص

## مثـال ٧

**أى من المخططات السهمية الآتية التى تمثل العلاقات ع١ ، ع٢ ، ع٣ على الترتيب يمثل دالة من س إلى ص؟ مع ذكر السبب.**




### الحـل

العلاقة ع١ ليست دالة لأن أ ∈ س يخرج منه سهمان إلى ص

العلاقة ع٢ ليست دالة لأن حـ ∈ س ولم يخرج منه سهم إلى ص

العلاقـة ع٣ هى دالـة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط إلى عناصر ص

**لاحظ أن**

كل دالة هى علاقـة، بينما كل علاقة ليست بالضرورة دالةً.

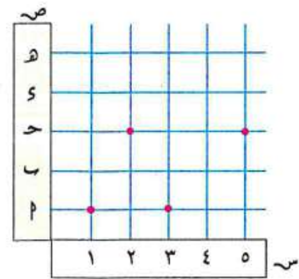
**نقاط هامة**

- فى المخطط السهمى الممثل للعلاقة من س إلى ص:

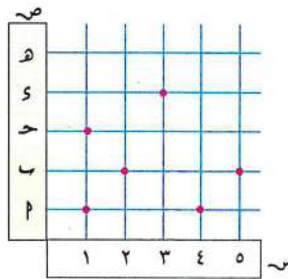
يقال للعلاقة إنها دالة إذا كان كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

## مثال ٨

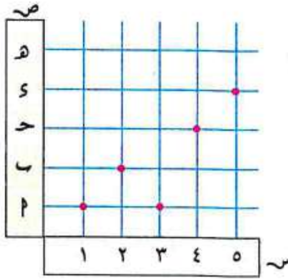
**لاحظ المخططات البيانية التالية ثم اذكر أيها يمثل دالة من س إلى ص**



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

### الحل

في **شكل (١)**: العلاقة لا تمثل دالة لعدم وجود نقطة على الخط الرأسي عند العدد ٤ (أي أن العدد ٤ ليس له صورة).

في **شكل (٢)**: العلاقة لا تمثل دالة لوجود نقطتين على الخط الرأسي المقابل للعدد ١ (وجود أكثر من صورة للعدد ١).

في **شكل (٣)**: تمثل دالة لوجود نقطة واحدة، وواحدة فقط على الخط الرأسي لكل عنصر من عناصر س (وجود صورة واحدة فقط لكل عنصر من عناصر س).

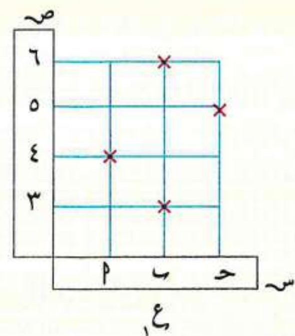


### نقاط هامة

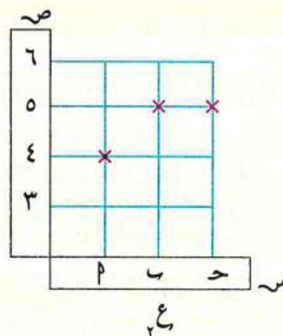
- **في المخطط البياني الممثل للعلاقة**: يقال للعلاقة إنها دالة إذا كان كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط.

### سؤال ٥

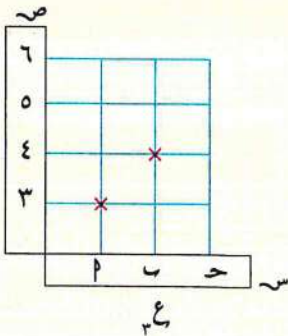
**إذا كانت س = {أ ، ب ، حـ}، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} فبين أى المخططات البيانية الآتية يمثل دالة من س إلى ص**



$ع_1$



$ع_2$



$ع_3$

## مثال ٩

إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

**فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص؟**

١ $ع_1$ = {(٣ ، ٦) ، (٤ ، ٧)}

٢ $ع_2$ = {(٣ ، ٦) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧)}

٣ $ع_3$ = {(٣ ، ٦) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٩)}

**الحـل**

١ $ع_1$ لا تمثل دالة لأن العنصر ٥ ∈ س لم يظهر كمسقط أول فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

٢ $ع_2$ تمثل دالة لأن: كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول، مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة المحددة للعلاقة.

٣ $ع_3$ لا تمثل دالة لأن العنصر ٣ ∈ س ظهر كمسقط أول مرتين فى الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

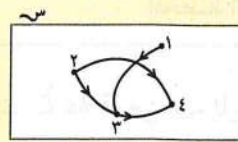
**نقاط هامة**

• **فى بيـان العلاقـة:** يقال للعلاقة إنها دالة إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول، مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة التى تحدد العلاقة.

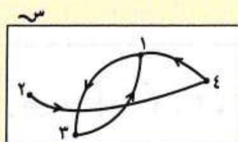
**سؤال ٦**

١ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} فأى من المخططات السهمية الآتية يعبر عن دالة على المجموعة س؟

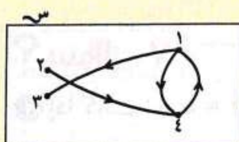
$ع_1$




$ع_2$




$ع_3$




٢ إذا كانت س = {٢ ، ٦ ، ٧} ، ص = {٥ ، ٣ ، ٨} فأى من العلاقات التالية تُمثل دالة من س إلى ص ، مع ذكر السبب؟

(موقع الوزارة)

$ع_1$ = {(٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٦ ، ٣) ، (٧ ، ٨)}

$ع_2$ = {(٢ ، ٣) ، (٦ ، ٣) ، (٧ ، ٨)}

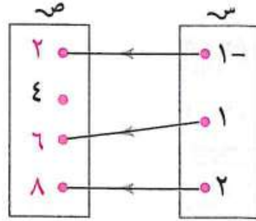
$ع_3$ = {(٢ ، ٣) ، (٦ ، ٨)}

## مثال ١٠

إذا كانت: سـ = {-١ ، ١ ، ٢} ، صـ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث أ ع ب تعنى أن : «ب = ٢ أ + ٤» لكل أ ∈ سـ ، لكل ب ∈ صـ

**فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وبين أنها دالة.**




### الحـل

بيان ع = {(-١ ، ٢) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٨)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر سـ ظهر كمسقط أول، مرة واحدة فقط.

## مثال ١١

إذا كانت: سـ = {٢ ، ٣ ، ٤} ، صـ = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث «أ ع ب» تعنى أن : «أ ب = ٢٤» لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ

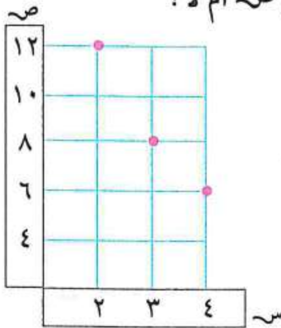
**فاكتب بيان ع ومثله بمخطط بيانى، وبين مع ذكر السبب: هل ع دالة من سـ إلى صـ أم لا؟**

### الحـل

بيان ع = {(٢ ، ١٢) ، (٣ ، ٨) ، (٤ ، ٦)}

ع دالة من سـ إلى صـ

لأن كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط.



المخطـط البيانـى

### سؤال ٧

١ **إذا كانت:** سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث « أ ع ب » تعنى أن « ب - أ = ١ » لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ **فأوجد بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، ثم بين أن ع دالة؟**

٢ **إذا كانت:** سـ = {-١ ، ٠ ، ١} وكانت ع علاقة على سـ حيث أ ع ب تعنى أن « أ + ب = عددًا زوجيًا» لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ سـ

( أ ) **فاكتب** بيان ع ومثله بمخطط ديكارتى، **وهل العلاقة دالة أم لا؟**

(ب) وإذا كان : (م ، ١) ∈ ع **فأوجد قيم م الممكنة.**

## التعبير الرمزى للدالة

يرمز للدالة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ بأحد الحروف د أو ر أو ق أو ............

وتكتب الدالة د هكذا د: سـ ⟵ صـ وتقرأ: د دالة من سـ إلى صـ،

إذا كان (س ، ص) ∈ لبيان الدالة د

فإن س $\xrightarrow{د}$ ص وتقرأ: د ترسم س إلى ص **أو** د(س) = ص وتسمى بقاعدة الدالة.

## المجال والمجال المقابل والمدى:

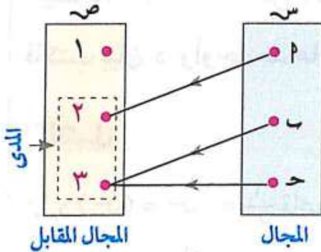
إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ

فـإن: • المجموعة سـ تسمى **مجـال الـدالة د**

• المجموعة صـ تسمى **المجـال المقـابـل للدالة د**

• مجموعة عناصر صـ التى لها أصل فى سـ تسمى **مـدى الـدالة د**

**وبالتالى فإن مـدى الـدالة هو مجموعة جزئية من المجال المقابل.**




**فمثلًا:** فى المخطط السهمى المقابل: إذا كانت د : سـ ⟵ صـ

فـإن: مجال الدالة د هى المجموعة سـ = { أ ، ب ، حـ }

المجال المقابل للدالة هى المجموعة صـ = {١ ، ٢ ، ٣}

مدى الدالة د : هو مجموعة صور عناصر المجموعة سـ وهو {٢ ، ٣} ⊂ صـ

## نقاط هامة

• يمكن أن تكون الدالة د معرفة من المجموعة سـ إلى نفسها، ويقال إن د معرفة على سـ ونكتب د : سـ ⟵ سـ

• **قاعدة الدالة :** هى التى تعين لكل عنصر فى مجال الدالة سـ صورة فى المجال المقابل للدالة صـ

• **بيان الدالة :** هو مجموعة الأزواج المرتبة التى تحدد الدالة فإذا كانت د: سـ ⟵ صـ

حيث د (س) = ص فإن:

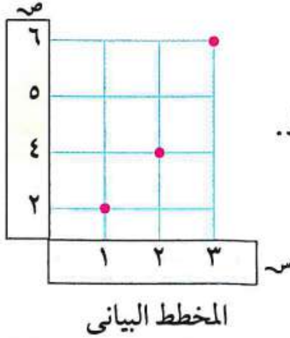
بيان د = {(س ، ص): س ∈ سـ ، ص ∈ صـ ، ص = د (س)}

، المدى = { د (س ): س ∈ سـ} ⊂ صـ

## مثـال ١٢

إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣}، صـ = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعنى أن (ب = ٢أ)، **اكتب بيان ع ؛ ثم بين أن ع دالة وأوجد المجال والمجال المقابل والمدى.**

### الحـل



المخطط البيانى

∴ بيان ع = {(١ ، ٢)، (٢ ، ٤)، (٣ ، ٦)}

ع تمثل دالة لأن كل عنصر من عناصر سـ ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط.

المجال = {١ ، ٢ ، ٣}

المجال المقابل = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

المدى = {٢ ، ٤ ، ٦}

## مثـال ١٣

إذا كانت سـ = {-١ ، ١ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$} وكانت الدالة د : سـ ⟵ سـ

حيث د(سـ) = سـ$^{-١}$ لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ سـ

**فاكتب بيان د وأوجد مداها.**

### الحـل

∵ د (سـ) = سـ$^{-١}$ = $\frac{١}{سـ}$ قاعدة الدالة

∴ د(-١) = $\frac{١}{-١}$ = -١ ، د (١) = $\frac{١}{١}$ = ١

د (٢) = $\frac{١}{٢}$ ، د ($\frac{١}{٢}$) = ١ ÷ $\frac{١}{٢}$ = ٢

∴ بيان د = {(-١ ، -١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، ($\frac{١}{٢}$ ، ٢)}

مدى الدالة = {-١ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢}

### سؤال ٨

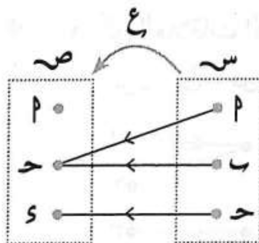
**إذا كانت سـ = {٣ ، ٥ ، ٧} ، صـ = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}** ، وكانت الدالة د : سـ ⟵ صـ

حيث د(سـ) = سـ – ١ **فاكتب بيان د ومثلها بمخطط بيانى وأوجد مداها.**




## تدريبات الأضــواء

### أولًا العلاقات:




**١** الشكل المقابل: يمثل مخططًا سهميًا للعلاقة ع من س إلى ص.

اكتب بيان ع كمجموعة أزواج مرتبة ومثلها بواسطة مخطط بيانى.

---

**٢** إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٠ ، -١ ، -٢ ، -٣} وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى (أ هو المعكوس الجمعى لـ ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع كمجموعة أزواج مرتبة ومثلها بمخطط سهمى.

---

**٣** إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨} وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى (أ - ب = عددًا أوليًا) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى. **(أسيوط ٢٠١٣)**

---

**٤** إذا كانت س = {س: س ∈ ط ، ١ ≥ س ≥ ٣}، وكانت ع علاقة مُعرفة على س

حيث (أ ع ب) تعنى (أ + ب يقبل القسمة على ٣) لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

---

**٥** إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{-1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، -٢ ، $\frac{-1}{3}$} وكانت ع علاقة من س

إلى ص حيث أ ع ب تعنى (أ ب = -١) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

---

**٦** إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١٣} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٩ ، ٢٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أن (ب = ٢أ - ١) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص وكان كل من الأزواج المرتبة التالية:

(٤ ، ل) ، (١٣ ، م) ، (ن ، ٩) ينتمى إلى بيان ع فأوجد قيمة كل من ل ، م ، ن

---

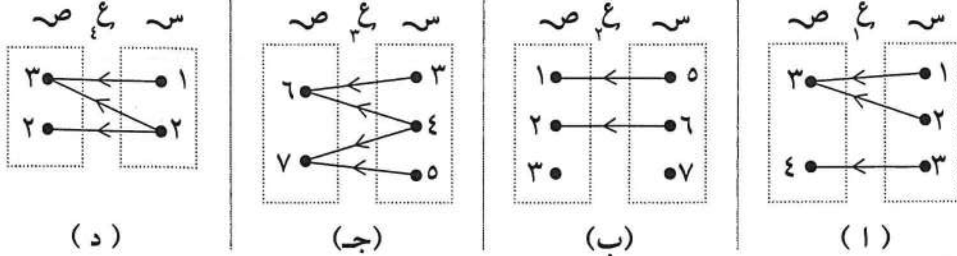
**٧** إذا كانت العلاقة ع = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)} مُعرفة على المجموعة س

حيث ن (س) = ٤ فاكتب س ومثل العلاقة بمخطط سهمى.

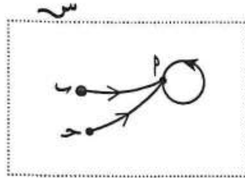
## ثانيًا الدالة (التطبيق):

**٨ اختر الإجابة المناسبة لكل مما يأتى:**

١ أى العلاقات الآتية تمثل دالة؟ ..........



٢ الشكل المقابل: يمثل دالة على س مداها .......... (بورسعيد ٢٠٢٢)



(أ) {أ} (ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) {أ ، ب} (د) {ب ، حـ}

٣ مجموعة صور عناصر المجال لدالة ما تسمى .......... (قنا ٢٠١٣)

(أ) المجال (ب) المجال المقابل (جـ) المدى (د) قاعدة الدالة

٤ إذا كانت ع دالة من س إلى ص فإن ص تسمى ..........

(أ) المجال (ب) المجال المقابل (جـ) المدى (د) قاعدة الدالة

٥ إذا كانت ع تمثل دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مجال هذه الدالة هو ..........

(أ) س (ب) ص (جـ) س × ص (د) ص × س

٦ إذا كان بيان العلاقة ع = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣)} فإن ع تمثل دالة مداها ..........

(أ) {١ ، ٢ ، ٤} (ب) {٢ ، ٤ ، ١ ، ٣ ، ٥}

(جـ) {٣ ، ٥} (د) ط

٧ إذا كانت ع دالة من س إلى ص حيث س = {١ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٣ ، ٥}

وكانت ع = {(١ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (أ ، ٣)} فإن أ = ..........

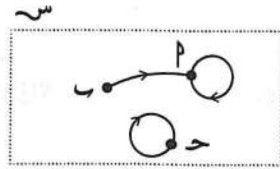
(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣

٨ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} وكانت ع علاقة على س حيث

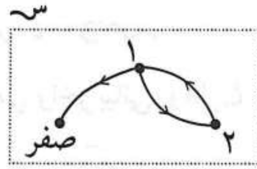
ع = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}، فإن عدد عناصر ع = ..........

(أ) ١٢ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٣

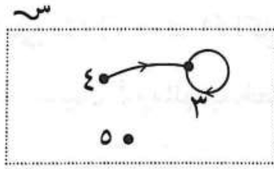
٩ اذكر أى المخططات التالية يمثل دالة على س، وأيها لا يمثل دالة ، وفى حالة كون العلاقة دالة اذكر المدى.



١



٢



٣

١٠ إذا كانت س = {-١ ، -٢ ، -٣ ، -٤} ولدينا العلاقات $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ معرفة على س كالآتى:

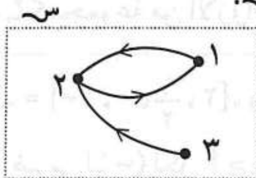
$ع_1$ = {(-١ ، -٢) ، (-٢ ، -٣) ، (-٣ ، -٤)}.

$ع_2$ = {(-١ ، -١) ، (-١ ، -٢) ، (-١ ، -٣) ، (-١ ، -٤)}.

$ع_3$ = {(-١ ، -٣) ، (-٢ ، -٣) ، (-٣ ، -٣) ، (-٤ ، -٣)}.

فاذكر أى العلاقات السابقة يمثل دالة؟ وأيها لا يمثل دالة؟ مع ذكر السبب.

١١ الشكل المقابل يمثل المخطط السهمى لعلاقة ع معرفة على س:




١ اكتب بيان ع. (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

٢ هل العلاقة ع دالة؟ وإذا كانت دالة فأوجد مداها.

١٢ إذا كانت س = {-٢ ، -١ ، صفر ، ١ ، ٢}، وكانت ع علاقة على س حيث إن ا ع ب

تعنى أن (ا + ب = صفر) لكل ا ∈ س ، لكل ب ∈ س فاكتب بيان ع.

ومثّلها بمخطط سهمىّ؛ وهل ع دالة؟ ولماذا؟ (قنا ٢٠٢٣)

١٣ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤}، وكانت ع علاقة على س حيث ا ع ب تعنى (ا − ب = صفر) لكل ا ∈ س ،

ب ∈ س فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وإذا كانت العلاقة دالة فاذكر مداها. (بنى سويف ٢٠٢٣)

١٤ إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٦}، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث ا ع ب

تعنى (ا = ٢ب) لكل ا ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمى، وبين أن ع دالة واكتب مداها.

**١٥** إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣}، صـ = {- ١}، وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب

تعنى أن (أ + ب ≤ ١) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ.

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى، وهل ع دالة؟ ولماذا؟ (القاهرة ٢٠١٧)

---

**١٦** إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٤} ، وكانت ع علاقة على سـ حيث أ ع ب تعنى أن (أ ضعف ب)

لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ سـ:

١ فاكتب بيان ع ومثّلها بمخطط سهميّ.

٢ وهل ع دالة؟ ولماذا؟

---

**١٧** إذا كانت سـ = {-٢ ، -٣ ، -٤}، صـ = {٣ ، ٨ ، ٩ ، ١٥}، ولدينا العلاقة ع معرفة من سـ ⟵ صـ

حيث إن أ ع ب تعنى أن (ب = أ$^{٢}$ - ١) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ.

فاكتب بيان ع كمجموعة من الأزواج المرتبة، وهل ع تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

---

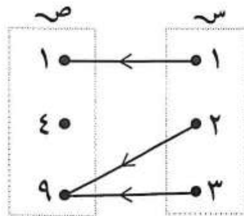
**١٨** إذا كانت سـ = {-١ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢}، وكانت ع علاقة على سـ حيث أ ع ب تعنى أن

(أ معكوس ضربى لـ ب) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ سـ

فاكتب بيان ع بمخطط سهمى، وبين مع ذكر السبب هل ع دالة أم لا. (الدقهلية ٢٠٢١)

---

**١٩** المخطط السهمى المقابل: (السويس ٢٠٢٢)




يمثل علاقة من سـ إلى صـ

حيث سـ = {١ ، ٢ ، ٣}، صـ = {١ ، ٤ ، ٩}

اكتب بيان ع ، هل ع دالة؟ ولماذا؟

---

**٢٠** إذا كانت سـ = {٠ ، ٣ ، ٤} ، صـ = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}،

وكانت الدالة د: سـ ⟵ صـ حيث د (سـ) = ٢ (سـ + ١)

فاكتب بيان د ومثلها بمخطط بيانى، وأوجد كلًّا من المجال والمجال المقابل والمدى. (الدقهلية ٢٠٢١)

٢١ إذا كانت سـ = {٣، ٤، ٥}، صـ = {٠، ٧، ٩، ١٦، ٢٥}،

وكانت د : سـ ⟵ صـ حيث د (سـ) = $سـ^2$ − ٩

فاكتب بيان د ثم أوجد مجموعة صور عناصر سـ بالدالة د

---

٢٢ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {١٢، ٤٧، ٥٣} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث أ ع ب تعنى أن (أ رقم من أرقام العدد ب) لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ:

١ فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

٢ وبين أن ع دالة من سـ إلى صـ وأوجد مداها.

---

٢٣ إذا كانت سـ = {١، ٤، ٧}، صـ = {−١، ١، ٤، ٧}، ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث أ ع ب تعنى أن (أ + |ب| = ٨) لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ،

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل العلاقة دالة ؟ مع ذكر السبب. (الدقهلية ٢٠١٣)

---

٢٤ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}،صـ = {٣، ٦، ٩، ١٢}، ع علاقة من سـ إلى صـ

حيث أ ع ب تعنى أن (أ = $\frac{١}{٣}$ ب) لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ،

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة؟ وإذا كانت دالة فأوجد مداها. (سوهاج ٢٠١٧)

---

٢٥ إذا كانت سـ = {٠، −٢، ٣}، صـ = {٠، −٤، ٨، $\frac{١}{٨}$، −٢٧، ٩}، وكانت ع علاقة من سـ إلى

صـ حيث أ ع ب تعنى (أ = $\sqrt[3]{ب}$) لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة؟ ولماذا؟ (موقع الوزارة)

---

٢٦ إذا كانت سـ = {١، ٣، ٥}، وكانت ع دالة على سـ وكان بيان ع = {(أ، ٣)، (ب، ١)، (١، ٥)}،

فأوجد: (البحيرة ٢٠٢٣)

١ مدى الدالة. ٢ القيمة العددية للمقدار أ + ب.

---

٢٧ إذا كانت سـ = {١، ٣، ٤}، صـ = {٢، ١٠، ك}، وكانت ع دالة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب

تعنى أن (ب = $أ^2$ + ١) لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ، فأوجد قيمة ك، ثم مثل الدالة بمخطط سهمى.

## تفكير إبداعي TIMSS

**٢٨** إذا كانت س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} ، ص = {ب ∈ ط : ١٠ ≤ ب < ٥٠}، وكانت د دالة من س إلى ص حيث بيان د = {(٣ ، ١٥)، (٥ ، ٢٥)، (٧ ، ٣٥)، (٩ ، ٤٥)}

١ فما مدى الدالة د؟

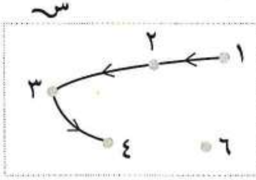
٢ واكتب قاعدة الدالة د

---

**٢٩** الشكل المقابل:

يمثل علاقة معرفة على س حيث س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦}

اكتب قاعدة هذه العلاقة.




---

**٣٠** إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {ن ، م ، ٩ ، ٧} ، وكانت الدالة د : س ⟵ ص حيث بيان د = {(١ ، ن)، (٢ ، م)، (٣ ، ٧)} يمثل دالة من س إلى ص حيث (ب − أ = ٤) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، فأوجد كلًّا من ن ، م واكتب مدى الدالة.

## تدريبات الكتاب المدرسى

١ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١٢ ، ٢١ ، ٤٧ ، ٥٢} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى (أ رقم من أرقام العدد ب) لكل أ ∈ س، ب ∈ ص فـ:
**أولًا:** اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.
**ثانيًا:** بين أىٌّ مما يأتى صواب مع ذكر السبب: ١ ع ٥٢ ، ٢ ع ٢١ ، ٣ ع ٤٧؟

---

٢ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠}، وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى (أ مضاعف ب)، لكل أ ∈ س، ب ∈ س، فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.

---

٣ إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى (أ ≥ ب)، لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص. فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.

---

٤ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى أن (العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص.
فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى. (الغربية ٢٠٢٤)

---

٥ إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥}، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى (أ + ب = ٧) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص. (موقع الوزارة)
فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى. (دمياط ٢٠٢٣)

---

٦ إذا كانت س = {-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٠ ، ١ ، ٤ ، ٦ ، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى (أ$^{٢}$ = ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص.
فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى. (موقع الوزارة) (الوادى الجديد ٢٠٢٣)

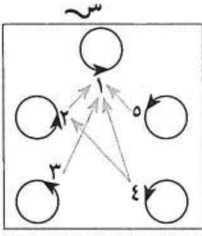
---

٧ إذا كانت س = {-٢ ، -١ ، ١ ، ٢}، ص = {$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى (أ$^{٣}$ = ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص.
فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى. (قنا ٢٠٢٢)

---

٨ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤}، ص = {٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى (أ تقسم ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص، فاكتب بيان ع. (موقع الوزارة)

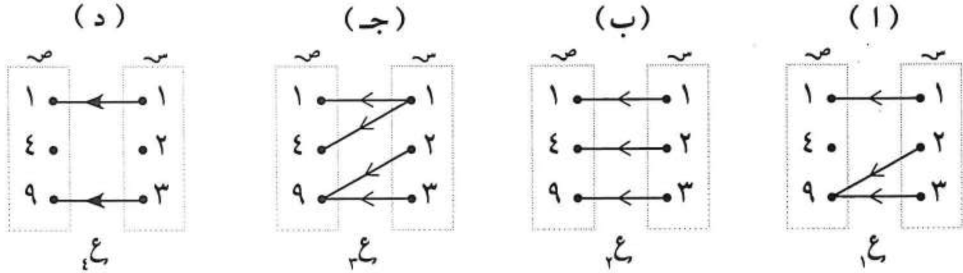
**٩** **الشكل المقابل:**



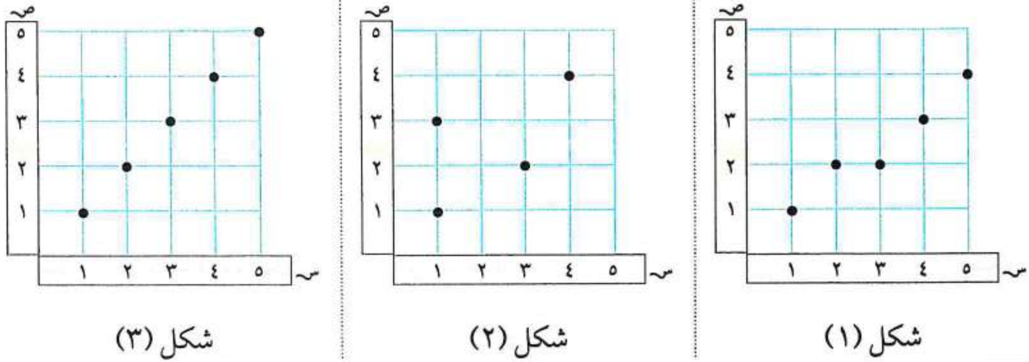
يمثل المخطط السهمى للعلاقة ع المعرفة على المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

**اكتب** بيان ع ومثلها بمخطط بيانى.

**١٠** أى من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص؟ وإذا كانت العلاقة تمثل دالة، **فأوجد** مدى الدالة.



**١١** أى من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص؟ وإذا كانت العلاقة تمثل دالة، **فأوجد مدى الدالة.**



**١٢** إذا كانت س = {٢ ، ٥ ، ٨}، ص = {١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث ٩ ع ب تعنى (٩ عامل من عوامل ب) لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص.

**فاكتب** بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى، وهل ع دالة؟ ولماذا؟

**١٣** إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٤ ، ٧}، ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٦}، ع علاقة من س إلى ص

حيث ٩ ع ب تعنى (٩ + ب < ٨) لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص.

**فاكتب** بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى، وهل ع دالة؟ ولماذا؟

**١٤** إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث ٩ ع ب تعنى (٩ + ٢ ب = عددًا فرديًا)

لكل ٩ ∈ س، ب ∈ س، **فاكتب** بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة؟ ولماذا؟ (جنوب سيناء ٢٠١٩)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت ع دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن س تسمى .......... (الإسكندرية ٢٠١٣)

(أ) المجال (ب) المجال المقابل (جـ) المدى (د) قاعدة الدالة

٢ إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين وكان ن (س) = ن (س × ص) فإن ن (ص) = ..........

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر (بورسعيد ٢٠٢٤)

٣ إذا كانت ع دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مدى الدالة ⊂ .......... (المنوفية ٢٠١٣)

(أ) س (ب) ص (جـ) س × ص (د) ع

٤ إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} وكانت ع دالة على س وكان بيان ع = {(أ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (١ ، ٥)}

فإن القيمة العددية للمقدار أ + ب = .......... (السويس ٢٠١٩)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨

٥ إذا كانت س × ص = {(٢ ، ٣)} ، فإن $س^٢$ = .......... (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) {(٤ ، ٩)} (ب) {(٤ ، ٣)} (جـ) {(٢ ، ٢)} (د) {(٢ ، ٩)}

٦ إذا كانت ن($س^٢$) = ٤ ، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) = .......... (البحيرة ٢٠٢٣)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

## ٢ أجب عما يأتي:

١ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى (أ = ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ س، **اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.** (موقع الوزارة)

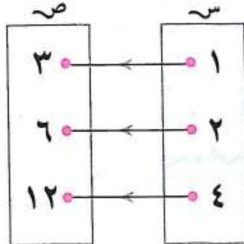
٢ إذا كانت س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ٢} ، ص = {-٣ ، ١ ، ٥ ، ٢} وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن ($أ^٢$ + ١ = ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وبيّن: هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟ **وإذا كانت دالة فأوجد مداها.** (الشرقية ٢٠٢٣)




ذاكر الدرس ٣

# دوال كثيرات الحدود

## فكر وناقش




فى الشكـل المقابـل:

المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٤}

المجموعة ص = {٣ ، ٦ ، ١٢}

العلاقــة ع = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ١٢)}

• هل ع دالــة؟ نعم

• لماذا؟ لأن كل عنصر من عناصر المجموعة س خرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر المجموعة ص

• يمكن كتابـة قاعـدة الدالة السابقـة كالآتى: د (س) = ٣ س

## دوال كثيرات الحدود:

إذا كان د : ع ⟵ ع حيـث: د(س) = $أ_٠ + أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$ + ...... + $أ_ن$ $س^ن$

حيـث: ن ∈ ط ، $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ...... ، $أ_ن$ أعداد حقيقية ، $أ_ن$ ≠ صفر

فـإن د: تسمى دالة كثيرة حدود من الدرجة ن

**من التعريف نستنتج أن:**

١ المجال والمجال المقابل للدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية «ع»

٢ قوة (أس) المتغير س فى جميع حدود قاعدة الدالة هو عدد طبيعى.

## مثـال ١

**أى من الدوال التى لها القواعد الآتية تمثل دالة كثيرة الحدود؟ مع ذكر السبب:**

١ $د_١$ (س) = $س^٣$ + $س^٢$ + ٣

٢ $د_٢$ (س) = $س^٣$ + $\frac{١}{س}$ + ٧

٣ $د_٣$ (س) = $س^٢$ + $\sqrt{س}$ + ٨

٤ $د_٤$ (س) = س (س + $\frac{١}{س}$ + ٢)

**الحـل**

١ $د_١$ هى دالة كثيرة الحدود **لأن:** مجالها ع ، ومجالها المقابل ع ، وقوة المتغير س عدد طبيعى

٢ $د_٢$ ليست دالة كثيرة الحدود **لأن:** مجالها = ع - {صفر}

٣ $د_٣$ ليست دالة كثيرة الحدود **لأن:** مجالها = [صفر ، ∞[

٤ $د_٤$ ليست دالة كثيرة الحدود **لأن:** مجالها = ع - {صفر}.

**لاحظ أن**

يجب التعرف على مجال الدالة كثيرة الحـدود قبل وضـع قاعدتها فى أبسط صورة.

## درجة الدالة كثيرة الحدود:

هى قيمة أكبر قوة (أس) للمتغير فى قاعدة الدالة.

فمثلًا: د (س) = ٣ س − ١ من الدرجة الأولى (دالة خطية)

د (س) = −٢ من الدرجة الصفرية (دالة ثابتة)

د (س) = صفر ليس لها درجة (الدالة الصفرية)

**لاحظ أن**

عند بحث درجة الدالة يجب وضع قاعدتها فى أبسط صورة قبل تعيين الدرجة.

## مثال ٢

**اذكر درجة الدوال كثيرات الحدود التى لها القواعد الآتية:**

١ $د_١$ (س) = ٥ س − ٢ س$^٢$

٢ $د_٢$ (س) = س$^٣$ − ٢ س + ٣

٣ $د_٣$ (س) = س (س$^٣$ − ١)

٤ $د_٤$ (س) = س (س − ١)$^٢$

### الحل

١ $د_١$ (س) = ٥ س − ٢ س$^٢$ — $د_١$ دالة كثيرة الحدود من **الدرجة الثانية** (تربيعية)

٢ $د_٢$ (س) = س$^٣$ − ٢ س + ٣ — $د_٢$ دالة كثيرة الحدود من **الدرجة الثالثة** (تكعيبية)

٣ $د_٣$ (س) = س (س$^٣$ − ١) = س$^٤$ − س — $د_٣$ دالة كثيرة الحدود من **الدرجة الرابعة**

٤ $د_٤$ (س) = س (س$^٢$ − ٢ س + ١) = س$^٣$ − ٢ س$^٢$ + س — $د_٤$ دالة كثيرة الحدود من **الدرجة الثالثة** (تكعيبية)

### سؤال ١

**١ أى من الدوال التى لها القواعد الآتية تمثل دالة كثيرة الحدود؟ مع ذكر السبب:**

(أ) $د_١$ (س) = ٢ س − ٧ (ب) $د_٢$ (س) = س$^٣$ + س$^{\frac{١}{٢}}$ (جـ) $د_٣$ (س) = $\sqrt{٢٧}$ س + س$^٢$

**٢ إذا كانت الدوال التى لها القواعد الآتية كثيرات حدود من ح ← ح فاذكر درجة كل منها:**

(أ) $د_١$ (س) = ٢ س$^٤$ − (٢ س$^٤$ − ٣) (ب) $د_٢$ (س) = س$^٢$ (س − ٢)$^٢$

## مثال ٣

إذا كانت د (س) = س$^{٢}$ − س + ٣ فأوجد: د (−٢) ، د (٠) ، د (√٣) (أسيوط ٢٠١٤)

**الحل**

∵ د (س) = س$^{٢}$ − س + ٣

∴ د (−٢) = (−٢)$^{٢}$ − (−٢) + ٣ = ٤ + ٢ + ٣ = ٩

د (٠) = (٠)$^{٢}$ − (٠) + ٣ = ٣

د (√٣) = (√٣)$^{٢}$ − (√٣) + ٣ = ٦ − √٣

> **لاحظ أن**
> د (−٢) تعنى صورة العدد (−٢) بتأثير الدالة د

## مثال ٤

إذا كانت د(س) = ٥ س − أ ، ر (س) = س − ٢أ وكان د (١) + ر (٣) = −٧

فأوجد قيمة أ (الإسكندرية ٢٠٢٠)

**الحل**

∵ د (١) = ٥ − أ ، ر (٣) = ٣ − ٢أ ، ∵ د (١) + ر (٣) = −٧

∴ ٥ − أ + ٣ − ٢أ = −٧ ∴ −٣أ + ٨ = −٧ ∴ −٣أ = −١٥ ∴ أ = ٥

## مثال ٥

إذا كانت د(س) = س$^{م-٣}$ + س$^{٤-م}$ دالة كثيرة الحدود، حيث م ∈ ط فأوجد:

١ قيمة د (١) ٢ قيم م (الشرقية ٢٠٢٠)

**الحل**

١ د (١) = ١$^{م-٣}$ + ١$^{٤-م}$ = ١ + ١ = ٢

٢ ∵ د (س) كثيرة الحدود ∴ م − ٣ ≥ ٠ ، ٤ − م ≥ ٠

∴ م ≥ ٣ ، م ≤ ٤ ∴ ٣ ≤ م ≤ ٤

، ∵ م ∈ ط ∴ م ∈ {٣ ، ٤} وتكون د (س) = س + ١

## سؤال ٢

١ إذا كانت: د (س) = ٢س + ب ، ر (س) = س$^{٢}$ + ب وكان: د (٢) + ر (−٤) = ٣٠

فأوجد د (−٢) − ر (٢) (الأقصر ٢٠٢٠)

٢ إذا كانت: د (س) = س$^{٢}$ − ٢س ، ر (س) = س − ٢ (بنى سويف ٢٠١٨)

(أ) فأوجد د (√٣) + ٢ ر (√٣) (ب) فأثبت أن: د (٢) = ر (٢)




تدريبات الأضــواء

## دوال كثيرات الحدود ودرجتها:

### ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} وكانت د : س ⟵ ع حيث د (س) = ٢ س + ١ (كفر الشيخ ٢٠١٧)

فإن مجموعة صور عناصر المجال بواسطة الدالة د هى ..............

(أ) {٣ ، ٥ ، ١١} (ب) {٣ ، ٧ ، ٩} (جـ) {١ ، ٣ ، ١١} (د) {٣ ، ٧ ، ١١}

٢ الدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = أ س$^{٢}$ + أ ، أ ≠ ٠ كثيرة حدود من الدرجة .........

(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الرابعة

٣ جميع الدوال الآتية كثيرة الحدود عدا الدالة ............ (قنا ٢٠١٩)

(أ) $د_{١}$ (س) = س$^{٣}$ + س$^{٢}$ + ٣ (ب) $د_{٢}$ (س) = س$^{٢}$ + $\frac{١}{س}$ + ٧

(جـ) $د_{٣}$ (س) = ٥ − س$^{٢}$ (د) $د_{٤}$ (س) = س$^{٢}$ (س − ٣)$^{٢}$

٤ الدالة د حيث د (س) = س$^{٢}$ − ٣ كثيرة حدود من الدرجة ............ (كفر الشيخ ٢٠١٤)

(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الرابعة

٥ درجة الدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = س$^{٢}$ − (س$^{٢}$ − ٢) هى ............ (قنا ٢٠١٤)

(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الصفرية

٦ الدالة د حيث د (س) = س$^{٤}$ − ٢ س$^{٣}$ + ٧ كثيرة حدود من الدرجة .......... (جنوب سيناء ٢٠١٩)

(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الرابعة

٧ إذا كانت د (س) = ٧ س − $\frac{١}{٢}$ فإن د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ............

(أ) ٣ (ب) ٦ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٧ $\frac{١}{٢}$ (د) ٦

٨ إذا كانت د (س) = س$^{٢}$ − $\sqrt{٢}$ س فإن د ($\sqrt{٢}$) = ............ (الدقهلية ٢٠١١)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) صفر

٩ إذا كانت د (س) = ١ – $س^٢$ فإن د (– ١) = ..............

( أ ) صفر (ب) ٢ (جـ) –١ ( د ) –٢

١٠ إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^٣$ فإن د (٢) + د(–٢) = .............. (بورسعيد ٢٠٢٥)

( أ ) ٨ (ب) ٤ (جـ) –٨ ( د ) صفر

١١ إذا كانت د (س) = $س^٢$ + س – ١ فإن د (١) + د (–١) = ..............

( أ ) ١ (ب) –١ (جـ) صفر ( د ) –٢

١٢ إذا كانت د (س) = س – ٥ وكان $\frac{١}{٢}$ د (أ) = ٣ فإن أ = ..............

( أ ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ١١ ( د ) ١٦

١٣ إذا كانت (٣ ، ب) تنتمى لبيان الدالة د حيث د (س) = ٢ س – ١ فإن ب = ............ (بورسعيد ٢٠٢٤)

( أ ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ ( د ) ٧

١٤ إذا كان الزوج المرتب (٣ ، ٢ك) ينتمى لبيان الدالة د : د (س) = ٢س + ٤ فإن ك = ....... (الفيوم ٢٠٢٢)

( أ ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ ( د ) ٥

١٥ إذا كانت (أ ، أ) ∈ لبيان الدالة د حيث د (س) = ٢ س – ٣ فإن أ = .............. (الفيوم ٢٠٢٢)

( أ ) –١ (ب) ٢ (جـ) ٣ ( د ) ٥

١٦ إذا كانت د (س) = س ، فإن: ٢ د (٥) – ٥ د (٢) = ..............

( أ ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) –١٠ ( د ) صفر

١٧ إذا كانت د (س) = $س^٢$ – ب ، د ($\sqrt{٣}$) = صفر فإن ب = ..............

( أ ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) ٩ ( د ) ١٨

١٨ إذا كانت د (س) = ٥ س فإن $\frac{٢ \text{ د } (٥) - \text{ د } (٥)}{٥}$ = ..............

( أ ) ٥ (ب) ١ (جـ) ١٠ ( د ) ٢٥

١٩ إذا كانت (٠ ، –٢) ∈ لبيان الدالة د حيث د (س) = –٣ س – ٢ ل فإن ل = ..............

( أ ) صفر (ب) ١ (جـ) –١ ( د ) –٢

٢٠ إذا كانت د (س + ٣) = س – ٣ فإن د (٧) = .............. (الدقهلية ٢٠١٩)

( أ ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٧ ( د ) ١٠

٢١ إذا كانت د ($س^٢$) = |س| + ٢ فإن د (٩) = ..............

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١١ (د) -١

٢٢ إذا كانت د (س) = (٢أ - ٢) $س^٣$ + ٣ $س^٢$ + س + ٢ كثيرة حدود من الدرجة الثانية

فإن أ = .............. (الشرقية ٢٠١٩)

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ١

٢٣ إذا كانت د: ح ← ح حيث د (س) = $س^{ك-٢}$ + ٣ وكانت د (٢) = ١١ فإن ك = ........ (الشرقية ٢٠٢٠)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٣

٢٤ إذا كانت د (س) = ن $س^٢$ + ٢ $س^ن$ - ٣ فإن مجموعة قيم ن الممكنة والتى تجعل د دالة من الدرجة

الثانية هى .............. (الدقهلية ٢٠١٦)

(أ) {٢، ٣} (ب) {١، -١} (جـ) {٢، ١، ٠} (د) {٢، ١}

٢٥ إذا كانت د (س) = $س^٢$، س ∈ [-٣، ٣] فإن د (س) ∈ ..............

(أ) [٠، ٣[ (ب) ]-٣، ٣[ (جـ) [٠، ٩] (د) [-٩، ٩]

٢٦ إذا كانت ($أ^٢$، أ) ∈ بيان الدالة د : د (س) = ٢ س - ٣ فإن قيمة أ الصحيحة هى ...........

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٢ إذا كانت د (س) = $س^٢$ - س + ٣ ، فأوجد د (-٢)، د (٠)، د (١) (أسيوط ٢٠١٤)

---

٣ إذا كانت د (س) = ٢$س^٢$ - ٥س + ٢ ، فأثبت أن د (٢) = د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (الأقصر ٢٠١٤)

---

٤ إذا كانت د (س) = ٢س - ١ ، فأثبت أن د (٢) - ٣ د (١) = صفر

---

٥ إذا كانت د (س) = ٤س + ب ، وكان د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٥ فأوجد قيمة ب. (المنيا ٢٠٢٣)

---

٦ إذا كانت د دالة على س حيث س = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت د (٣) = ٣، د (٤) = ٥، د (٥) = ٥، د (٦) = ٥ (الإسماعيلية ٢٠١٥)

١ فمثل د بمخطط سهمى. ٢ واكتب بيان د واذكر مداها.

٧ إذا كانت د (س) = ٢س + ١ ، ر (س) = س$^{٢}$

فأوجد قيمة د (٢) − ر (٢).

---

٨ إذا كانت د (س) = ٣ − س ، ر (س) = س$^{٢}$ + ٤ فأوجد:

١ د (٢) − ٢ ر ($\sqrt{٢}$)

٢ د ($\sqrt{٣}$) + ر ($\sqrt{٣}$) + $\sqrt{٣}$

---

٩ إذا كانت د (س) = ٢ س + ٥ ، ر (س) = س − ٦

فأثبت أن: د (٢) + ٣ ر (٣) = صفر (بورسعيد ٢٠٢٢)

---

١٠ إذا كانت د (س) = س$^{٢}$ − س − ١ ، ر (س) = س$^{٥}$ + ١ (المنوفية ٢٠١٥)

١ فعين درجة كل من الدالتين د ، ر

٢ وأوجد قيمة د (٢) + ر (−١)

## تفكير إبداعى TIMSS

١١ إذا كانت الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ + ب س + حـ ، د (س) = −٣ ، عندما س ∈ {٥ ، ١}

فأوجد قيمة كل من ب ، حـ

---

١٢ إذا كانت د (س) = أ س + ب وكان د (أ) = ب

فأوجد قيمة المقدار أ ب$^{٢}$ + ٥ (الشرقية ٢٠١٥)

---

١٣ إذا كانت د : د (س) = س$^{أ+ب}$ + (أ + ٢) س$^{٥}$ + ٨ من الدرجة الرابعة،

أوجد قيمة أ ، ب (توجيه الشرقية)

---

١٤ إذا كان أ + ب = ١١ ، وكانت د (س) = ٢ س + ٥

فأوجد د (أ) + د (ب)

---

١٥ إذا كانت : د (س) = ٤ س + ب، ر (س) = ب ، حيث د، ر دالتان كثيرتا حدود،

وكانت د (١) + ر (٤) = ١٢ ، فأوجد قيمة د (٤) + ر (−١) (الشرقية ٢٠١٣)

## تدريبات الكتاب المدرسى

١ أى من الدوال التالية تمثل كثيرة حدود...؟

( أ ) $د_١ (س) = س^٣ + س^٢ + ٣$

(ب) $د_٢ (س) = س^٣ + \frac{١}{س} + ٧$

(جـ) $د_٣ (س) = س^٢ + \sqrt{س} + ٨$

( د ) $د_٤ (س) = س \left(س + \frac{١}{س} - ٢\right)$

---

٢ إذا كانت د: ع ⟵ ع فاذكر درجة الدالة فى كل حالة: (الأقصر ٢٠١٨)

( أ ) $د (س) = ٣ - ٢س$

(ب) $د (س) = س^٢ - (س^٢ - ٣)$

(جـ) $د (س) = س (س - ٢س^٢)$

( د ) $د (س) = س^٢ (س - ٣)^٢$

---

٣ إذا كانت $د (س) = س^٢ - ٣س$ ، $ر (س) = س - ٣$

( أ ) فأوجد: $د(\sqrt{٢}) + ٣ ر(\sqrt{٢})$ (الإسكندرية ٢٠٢٢)

(ب) وأثبت أن: $د (٣) = ر (٣) =$ صفر

---

٤ إذا كانت د: ع ⟵ ع فاذكر درجة د، ثم أوجد د (-٢) ، د (٠) ، $د\left(\frac{١}{٢}\right)$ فى كل مما يأتى:

( أ ) $د (س) = ٣ - ٢س$

(ب) $د (س) = س^٢ - ٤$

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت د (س) = س (٣ س + ٢)$^{٢}$ فإن د (س) من الدرجة ................ (الدقهلية ٢٠١٥)

( ا ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة ( د ) الرابعة

٢ إذا كان عدد عناصر س ∪ ص = ٧ فإن عدد عناصر س لا يمكن أن تساوى ......... (توجيه الشرقية)

( ا ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ ( د ) ٨

٣ إذا كانت: (٢ ، ب) ∋ بيان الدالة د حيث د(س) = ٣ س − ٦ فإن ب= ................ (مطروح ٢٠١٧)

( ا ) صفر (ب) ٧ (جـ) ٩ ( د ) ٢

٤ إذا كان (٢ ، ٥) ∋ {٢ ، ٣} × {٤ × ك} فإن قيمة ٢ ك + ٣ = ................ (موقع الوزارة)

( ا ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٣ ( د ) ٧

٥ إذا كانت د (س) = ك س + ٨ ، د (٢) = صفر فإن ك = ................ (الدقهلية ٢٠٢٠)

( ا ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ ( د ) −٤

٦ إذا كان س × ص = {(١ ، ٢)، (١ ، ٣)، (١ ، ٤)}، فإن ن (س) + ن (ص$^{٢}$) = ......... (الفيوم ٢٠٢٣)

( ا ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ ( د ) ١٠

---

## ٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كانت س = {٠ ، ٣ ، ٥}، ص = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}، (الوادى الجديد ٢٠١٧)

وكانت د : س ⟵ ص حيث د (س) = ٥ − س

**فأوجد** مجموعة صور عناصر س بالدالة د ، وارسم مخططًا سهميًا للدالة د.

٢ إذا كانت د (س) = س$^{٢}$ + ٣ س + ٢ **فأثبت أن:** د (٣) − ٣ د (١) = ٢ (القاهرة ٢٠٢٢)

٣ إذا كانت د (س) = ٤ س + ك ، د $\left(\frac{1}{4}\right)$ = ١٢ **فأوجد** قيمة ك (المنيا ٢٠٢٢)

٤ إذا كانت د (س) = ٣ س + $\sqrt[3]{ب}$ ، د (٤) = ٢٠ **فأوجد** قيمة ب (الشرقية ٢٠٢٢)

٥ إذا كانت د (س) = س$^{٢}$ − ٢ س ، ر (س) = س − ٢ (القاهرة ٢٠٢٠)

( ا ) **فأثبت أن:** د (٢) = ر (٢). (ب) وإذا كانت ر (ك)= ٧ **فأوجد** قيمة ك.




ذاكر الدرس ٣

# دراسة بعض الدوال كثيرات الحدود

## فكر وناقش

- تعلمنا سابقًا معنى دوال كثيرات الحدود وعرفنا أن:

١ الدالة د حيث د ( س ) = ٣ هى دالة من الدرجة الصفرية وتسمى دالة **ثابتة**.

٢ الدالة د حيث د( س) = ٢ س + ١ هى دالة من الدرجة الأولى وتسمى دالة **خطية**.

٣ الدالة د حيث د( س) = $س^٢$ + ٢ س + ١ هى دالة من الدرجة الثانية وتسمى دالة **تربيعية**.

- **والآن كيف يمكن تمثيل كلٍّ من الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التربيعية بيانيًا؟**

## أولًا الدالة الصفرية - الدالة الثابتة:

| | الدالة الصفرية | الدالة الثابتة |
|---|---|---|
| الصورة الرياضية | الدالة د: ح ← ح<br>حيث د (س) = صفر | الدالة د: ح ← ح<br>حيث د (س) = ﭐ، ﭐ ∈ $ح^*$ |
| الدرجة | غير معرفة الدرجة | من الدرجة الصفرية |
| المدى | {صفر} | {ﭐ} |
| التمثيل البيانى | تمثل بيانيًا بمحور السينات نفسه.<br>وهى المحايد الجمعى لعملية جمع الدوال | تمثل بيانيًا بخط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ﭐ)<br>ويكون الخط أعلى محور السينات عندما ﭐ > ٠<br>ويكون الخط أسفل محور السينات عندما ﭐ < ٠ |

## مثـال ١

إذا كانت د دالة: د (س) = ٥ حيث س ∈ ح فأوجد كلًّا من:

١ د (٢)    ٢ د (٢) − د (−٢)    ٣ ٢ د (٢)

٤ د (س^٢)    ٥ د (س + ٢)    ٦ د (٢) / د (أ)

### الحـل

١ د (٢) = ٥    ٢ د (٢) − د (−٢) = ٥ − ٥ = صفر    ٣ ٢ د (٢) = ٢ × ٥ = ١٠

٤ د (س^٢) = ٥    ٥ د (س + ٢) = ٥    ٦ د (٢) / د (أ) = ٥ / ٥ = ١

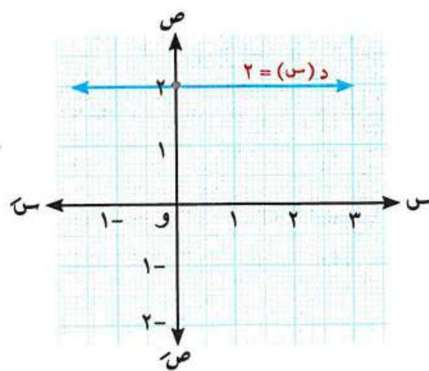
## مثـال ٢

مثل بيانيًّا الدالتين التاليتين: ١ د (س) = ٢    ٢ د (س) = −١

ثم أوجد لكل منهما: د (١) ، د (٠) ، د (−١) وكذلك نقطة التقاطع مع محور الصادات.

### الحـل

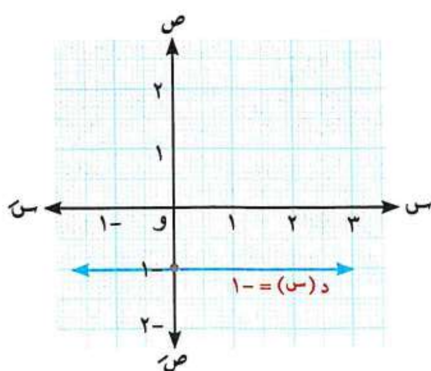
١




د (١) = ٢ ، د (٠) = ٢ ، د (−١) = ٢

نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ٢)

٢




د(١) = −١ ، د(٠) = −١ ، د(−١) = −١

نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، −١)

## سؤال ١

مثل بيانيًّا الدالة د ، حيث د (س) = ٣ ثم أوجد قيمة:

١ د (٥) + د (−٥)    ٢ ٢ د (٣)

## ثانيًا: الدالـة الخطيـة :

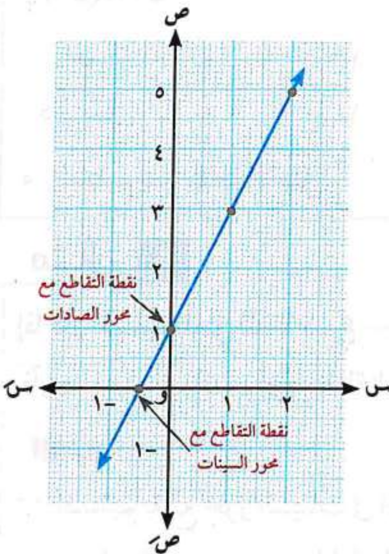
- هى دالة كثيرة حدود قاعدتها على الصورة د (س) = أ س + ب حيث أ ∈ ع*، ب ∈ ع
- دالة من الدرجة الأولى، ومداها ع
- تُمثل بيانيًا بخط مستقيم يقطع محور **السينات** فى النقطة $\left(\frac{-ب}{أ}، ٠\right)$ ويقطع محور **الصادات** فى النقطة (٠ ، ب)

**فمثلًا:** $د_١$ (س) = ٥س – ٣ ، $د_٢$ (س) = س ، $د_٣$ (س) = ٥ – ٢س

## مثـال ٣

**مثل بيانيًا الدالة الخطية د حيث د (س) = ٢س + ١ ثم أوجد نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات.**

**الحـل**




- **لتمثيل هذه الدالة بيانيًا:** نعين ثلاثة أزواج مرتبة تنتمى إلى بيان د
- **ويمكن وضع هذه الأزواج المرتبة داخل جدول كالآتى:**

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د (س) | ١ | ٣ | ٥ |

نعين فى المستوى الإحداثى النقاط الثلاث

ونرسم المستقيم المار بأى نقطتين منها:

- نقطة التقاطع مع محور السينـات $\left(\frac{-١}{٢}، ٠\right)$
- نقطة التقاطع مع محور الصـادات (٠ ، ١)

### نقاط هامة

- الدالة الخطية عند تمثيلها بيانيًا يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة، ويفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة التمثيل البيانى.

### سؤال ٢

**مثّل بيانيًا** المستقيم الممثل للدالة د حيث د (س) = ٣ – ٢س ، **ثم أوجد** نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات.

### حالة خاصة

إذا كانت د: د (س) = أ س + ب وكان أ ≠ ٠ ، ب = ٠

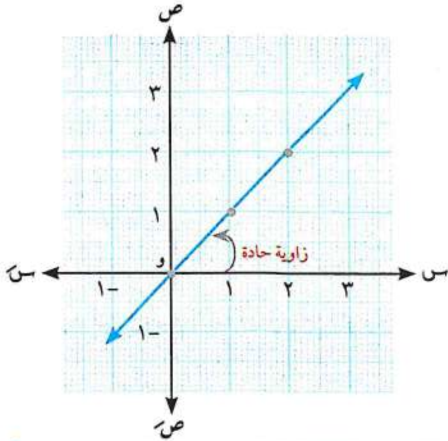
فإن: د (س) = أ س تمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل و(٠ ، ٠)

- تُمَثَّل دالة الدرجة الأولى بيانيًا بخطٍّ مستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
  - زاوية حادة عندما أ > صفر
  - زاوية منفرجة عندما أ < صفر

## مثال ٤

**مثل بيانيًا الدالة الخطية د حيث د (س) = س**

**الحل**




د (س) = س

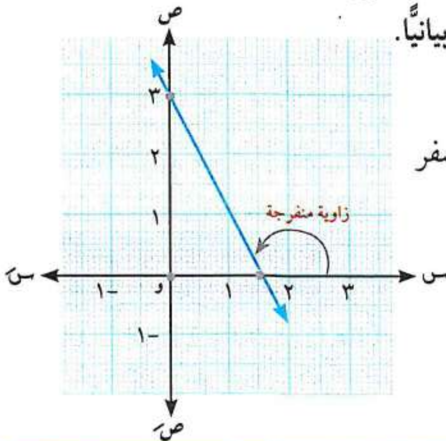
| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د (س) | ٠ | ١ | ٢ |

- المستقيم يمر بنقطة الأصل.

## مثال ٥

**إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = - ٢ س + ٣ يقطع محور السينات فى النقطة (ء ، هـ) فأوجد قيمتى ء ، هـ ثم أوجد نقطة التقاطع مع محور الصادات ومثله بيانيًا.**

**الحل**




∵ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (ء ، هـ) ∴ هـ = صفر

∵ النقطة (ء ، ٠) تقع على الخط المستقيم

∴ - ٢ ء + ٣ = ٠ ⟸ ٢ ء = ٣ ⟸ ء = ١,٥

- نقطة التقاطع مع محور الصادات هى (٠ ، ٣)
- لأن عند س = ٠ تكون د (س) = -٢ × ٠ + ٣ = ٠ + ٣ = ٣

### سؤال ٣

إذا كانت النقطة (أ ، -٢) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

**فأوجد قيمة أ ثم مثله بيانيًا.**

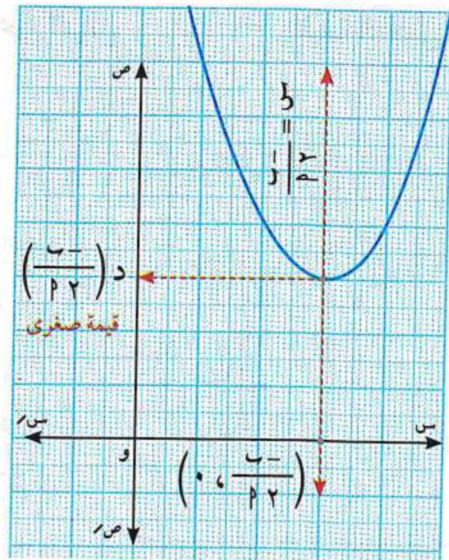
## ثالثًا الدالـة التربيعية :

| | |
|---|---|
| قاعدة الدالة التربيعية | د(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠<br>أ معامل $س^{٢}$ ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق. |
| درجـة قاعـدة الدالة | من الدرجة الثانية: **مثل:** د(س) = $س^{٢}$ ، د(س) = $-س^{٢}$ + ٥ س − ٦ |
| مدى الدالة | مجموعة جزئية من ح |
| التمثيـل البيـانى | تمثل الدالة بيانيًا على فترة معينة عن طريق تعيين بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان الدالة.<br>• وتكون نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$<br>• وتكون معادلة محور التماثل هى: $س = \frac{-ب}{٢أ}$ |

**ومنحنى الدالة يأخذ أحد الشكلين الآتيين:**

١ **يكون المنحنى مفتوحًا لأعلى**

عندما يكون معامل $س^{٢}$ موجبًا ($أ > ٠$)

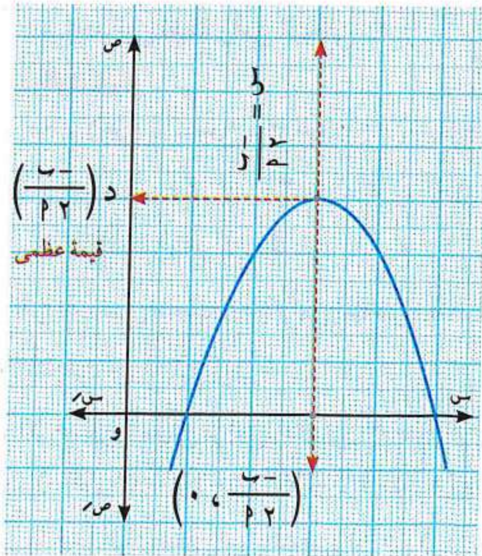



يكون للدالة قيمة صغرى وهى د$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

مدى الدالـة = $\left[د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) ، \infty\right[ \subset ح$

٢ **يكون المنحنى مفتوحًا لأسفل**

عندما يكون معامل $س^{٢}$ سالبًا ($أ < ٠$)

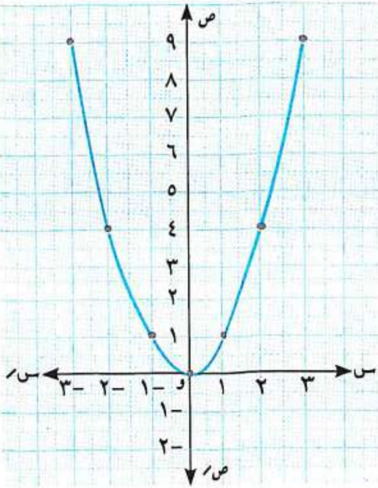



يكون للدالة قيمة عظمى وهى د$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

مدى الدالـة = $\left]-\infty ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right] \subset ح$

## مثال ٦

**مثِّل بيانيًّا** منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ مستعينًا بالفترة [- ٣ ، ٣] موضحًا إحداثيي نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل لمنحنى الدالة والقيمة الصغرى للدالة.



**الحـل**

∵ د (س) = $س^٢$، س ∈ [- ٣ ، ٣]

| س | -٣ | -٢ | -١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٩ | ٤ | ١ | ٠ | ١ | ٤ | ٩ |

من الرسم نجد أن:

إحداثيي نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

معادلة محور التماثل: س = صفر (محور الصادات)

للدالة قيمة صغرى حيث إن معامل $س^٢$ موجب.

القيمـة الصغرى للدالـة = د (٠) = ٠

## مثال ٧

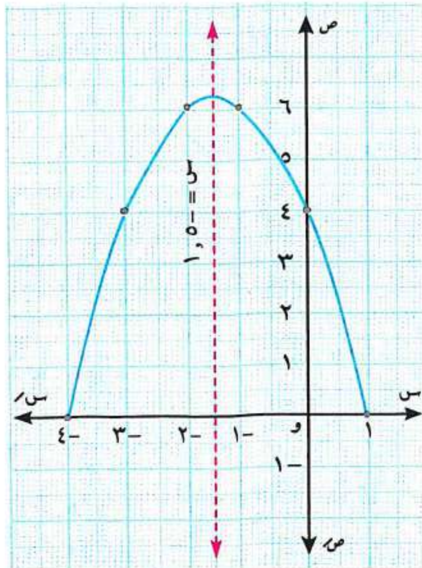
**مثِّل بيانيًّا** منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ - $س^٢$ - ٣س مستعينًا بالفترة [- ٤ ، ١] **ثم أوجـد:**

١ إحداثيي نقطة رأس المنحنى ٢ معادلة محور التماثل ٣ القيمة العظمى للدالة

**الحـل**

∵ د (س) = - $س^٢$ - ٣ س + ٤ ، س ∈ [-٤ ، ١]

| س | -٤ | -٣ | -٢ | -١ | صفر | ١ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | صفر | ٤ | ٦ | ٦ | ٤ | صفر |




من الرسم: يصعب إيجاد رأس المنحنى؛ لذلك نوجد نقطة رأس المنحنى جبريًّا كما يلي:

الإحداثي السيني لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢ أ}$ = $\frac{-(-٣)}{٢(-١)}$ = -١,٥

د (-١,٥) = - (-١,٥)$^٢$ - ٣ (-١,٥) + ٤ = ٦,٢٥

١ إحداثيا نقطة رأس المنحنى (-١,٥ ، ٦,٢٥)

٢ معادلة محور التماثل: س = -١,٥

للدالة قيمة عظمى حيث إن معامل $س^٢$ < ٠.

٣ القيمة العظمى للدالة = د (-١,٥) = ٦,٢٥

## مثال ٨

مثّل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ − ٤ مستعينًا بالفترة [− ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد:

١ إحداثيى نقطة رأس المنحنى.

٢ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالة.

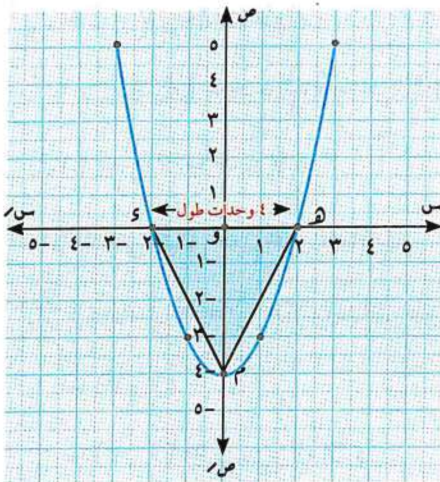
٣ القيمة الصغرى للدالة.

٤ أوجد مساحة سطح المثلث هـ ى م حيث هـ ، ى نقطتا تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، م نقطة تقاطع منحنى الدالة مع محور الصادات.

### الحل

∵ د (س) = $س^٢$ − ٤ ، س ∋ [−٣ ، ٣]

| س | −٣ | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٥ | ٠ | −٣ | −٤ | −٣ | ٠ | ٥ |




من الرسم نجد أن:

١ إحداثى نقطة رأس المنحنى (٠ ، − ٤)

٢ معادلة محور التماثل: س = صفر

٣ القيمة الصغرى للدالة = − ٤

٤ ∵ هـ (٢ ، ٠) ، ى (−٢ ، ٠) ، م (٠ ، −٤)

∴ مساحة سطح المثلث هـ ى م = $\frac{١}{٢}$ هـ ى × م و

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤

= ٨ وحدات مربعة

## سؤال ٤

١ مثّل بيانيًا منحنى الدالة د حيث: د (س) = $(س−٣)^٢$ مستعينًا بالفترة [٠ ، ٦] ومن الرسم أوجد:

( ا ) إحداثيى نقطة رأس المنحنى.

(ب) القيمة الصغرى للدالة.

(جـ) معادلة محور التماثل.

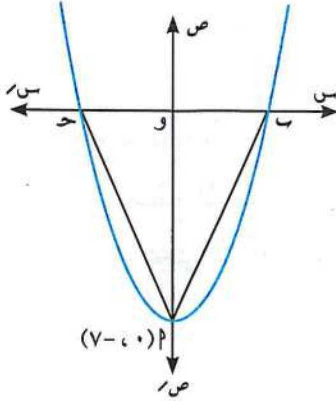
٢ مثّل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = ٤ − $س^٢$ مستعينًا بالفترة [−٣ ، ٣] ومن الرسم:

( ا ) استنتج إحداثيى نقطة رأس المنحنى، معادلة محور التماثل، القيمة العظمى للدالة. (أزهر الغربية ٢٠٢٥)

(ب) أوجد مساحة المثلث الذى رءوسه نقط تقاطع المنحنى مع محورى الإحداثيات.

## مثال ٩

**الشكل المقابل:** (الدقهلية ٢٠١٨)




يمثل منحنى الدالة د : د (س) = ل $س^٢$ - ٧ ،

، مساحة المثلث ٢ ب حـ = ٢١ وحدة مربعة ، ٢ (٠ ، -٧)

**أوجد إحداثيي نقطة ب، ثم أوجد قيمة ل**

**الحل**

∵ ٢ (٠ ، -٧)

∴ و٢ = ٧ وحدات طول

، ∵ مساحة △ ٢ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × ٢ و

∴ ٢١ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × ٧ ∴ ب حـ = $\frac{٢١ × ٢}{٧}$ = ٦ وحدات طول

، ∵ المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴  ٢و محور تماثل

∴ وب = وحـ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ وحدات طول

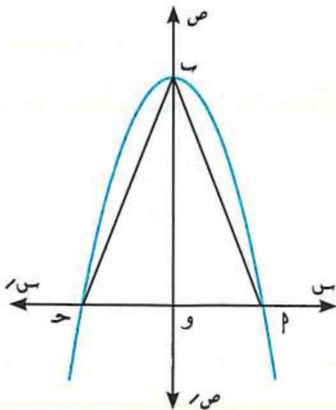
∴ ب (٣ ، ٠)

∵ ب (٣ ، ٠) ∈ منحنى الدالة د ∴ ٠ = ل × $(٣)^٢$ - ٧

∴ ٩ ل - ٧ = ٠ ⟸ ∴ ٩ ل = ٧ ∴ ل = $\frac{٧}{٩}$

## س؟ سؤال ٥

**الشكل المقابل:** (كفر الشيخ ٢٠١٨)




يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) = ٩ - $س^٢$ **أوجد:**

١ إحداثيي النقطتين ٢ ، حـ

٢ مساحة المثلث ٢ ب حـ

## مثال ١٠

إذا كان د (س) = $س^٢$ − كس + حـ وكانت النقطة م (١ ، ٤) هى نقطة رأس المنحنى، فأوجد قيمة كل من ك ، حـ

**الحل**

∵ الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$ ∴ $\frac{ك}{٢}$ = ١

∴ ك = ٢ ∴ د (س) = $س^٢$ − ٢س + حـ

∵ د (١) = ٤ ∴ $(١)^٢$ − ٢ (١) + حـ = ٤

∴ −١ + حـ = ٤ ∴ حـ = ٥

## استخـدام التكنولوجيـا

يمكن إيجاد الجدول المستخدم فى رسم منحنى الدالة التربيعية عن طريق الآلة الحاسبة، فمثلًا لرسم منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ − ٤ بالاستعانة بالفترة [−٣ ، ٣] تستخدم الآلة الحاسبة كما يلى:

| $x$ | F ($x$) |
|---|---|
| -3 | 5 |
| −2 | 0 |
| −1 | −3 |
| 0 | −4 |
| 1 | −3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 5 |

١ نضغط على مفتاح Mode ثم نختار نظام Table

فيظهر على الشاشة F ($x$) =

٢ نكتب قاعدة الدالة السابقة وذلك بالضغط على المفاتيح كما يلى:

Alpha ) $x^2$ - 4 ⟵

٣ نضغط على المفتاح = ثم -3 ثم = ثم 3 ثم =

فيظهر الجدول على الشاشة ويتم التنقل للأسفل والأعلى ولليمين واليسار باستخدام المفتاح Replay ،

وللخروج من البرنامج نضغط على Mode ثم 1






تدرّب الدرس ٣

## دراسة بعض الدوال كثيرات الحدود

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

**تدريبات الأضــواء**

## أولًا الدالة الصفرية - الدالة الثابتة:

### ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت د (س) = أ ، أ = صفر فإن: درجة الدالة ..............

( أ ) الصفرية (ب) الأولى (جـ) الثانية ( د ) ليس لها درجة

٢ إذا كانت د (س) = ٥ فإن: د (–٥) = .............. (القليوبية ٢٠٢٣)

( أ ) –٥ (ب) –١٠ (جـ) ٢٥ ( د ) ٥

٣ إذا كانت د (س) = –٢ فإن: د (س + ٢) = ..............

( أ ) صفر (ب) –٢ (جـ) ٢ ( د ) ٤

٤ إذا كانت د (٣س) = ٦ فإن: د (–٢) = .............. (الفيوم ٢٠١٩)

( أ ) –١٢ (ب) –٣ (جـ) ٦ ( د ) –١٨

٥ إذا كانت د (س) = ٣ فإن: د (–٥) – د (٥) = .............. (القاهرة ٢٠١٨)

( أ ) د (٢) (ب) ٢ (جـ) صفر ( د ) ١٠

٦ إذا كانت د (س) = ٣ فإن: ٦ د $\left(\frac{1}{2}\right)$ = ..............

( أ ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ ( د ) ١٨

٧ إذا كانت د (س) = ٢ فإن: ٣ د ($\sqrt{2}$) = ..............

( أ ) د (٣$\sqrt{2}$) (ب) ٦ (جـ) ٣ ( د ) ٢

٨ إذا كانت د (س) = ٤ فإن: $\frac{\text{د (٤)}}{\text{د (٨)}}$ = .............. (دمياط ٢٠٢٣)

( أ ) ٤ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ ( د ) ٨

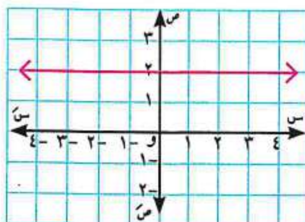
٩ الشكل المقابل يمثل الدالة د : ع ⟵ ع حيث: .............. (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

( أ ) د (س) = ٢

(ب) د (س) = –٢

(جـ) د (س) = س+٢

( د ) د (س) = س–٢



١٠ الدالة د : د (س) = ٥ يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة .............. (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٥ ، ٠) (جـ) (٥ ، -٥) (د) (٠ ، ٠)

١١ إذا كانت د (س) = (ن - ٢) كثيرة حدود مداها {٦}

فإن قيمة: ن = ..............

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

---

٢ مثل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية:

١ د (س) = ١ ٢ د (س) = -٢

## ثانيًا الدالـة الخطيـة:

٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت النقطة (م ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع ، (دمياط ٢٠٢٢)

د (س) = ٤ س - ٥ فإن م = ..............

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

٢ إذا كانت الدالة د: د (س) = ٥ س + ٤ يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ك) فإن ك = ..............

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ١٤

٣ الدالة د : د (س) = -٢ س يمثلها بيانيًّا خط مستقيم يمر بالنقطة ..............

(أ) (-٢ ، -٢) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٢)

٤ إذا كانت د (س) = س + ب ، د (٣) = ٧ فإن ب = .............. (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) ١٠ (ب) ٧ (جـ) ٤ (د) ٣

٥ إذا كانت د (س) = ك س + ٨ ، وكان د (٢) = -٦ فإن ك = ..............

(أ) ١٦ (ب) ٧ (جـ) -٧ (د) ٢

٦ إذا كان المستقيم الممثل للدالـة د: ع ⟵ ع حيث د (س)= ٢ س + ٣ حـ$^{٢}$ يمر بنقطـة الأصل

فإن حـ = .............. (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) صفر (د) $\frac{-٣}{٢}$

٧ الدالة د حيث د (س) = ٣ س - ١٢ يمثلها بيانيًّا مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ............

(دليل التقويم)

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)

٨ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢ س – ١ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ............... (بورسعيد ٢٠١٩)

(أ) $(\frac{١}{٢} ، ٠)$ (ب) (٠ ، –١) (جـ) (–١ ، ٠) (د) $(٠ ، \frac{١}{٢})$

٩ إذا كانت (أ ، ٤) إحدى نقط الدالة ر : ع ⟵ ع ، ر (س) = ٢ س + ب

فإن ٦ أ + ٣ ب = ............... (أزهر – المنيا ٢٠٢٥)

(أ) ١٢ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٣

---

٤ مثل بيانيًا كلًّا من الدوال الخطية الآتية، وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محورى الإحداثيات حيث س ∈ ع:

١ د : د (س) = س

٢ د : د (س) = – س

٣ د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

٤ د : د (س) = س + ١

٥ د : د (س) = س – ٣ (البحر الأحمر ٢٠٢٠)

٦ د : د (س) = ٥ – $\frac{١}{٢}$ س (القاهرة ٢٠٢٢)

---

٥ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ٦ س – أ يقطع محور الصادات فى النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمة ٢ أ + ٧ ب. (مطروح ٢٠٢٢)

---

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س – ٦ يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢ أ).

فأوجد قيمة أ ، ثم أوجد نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات. (الغربية ٢٠٢٠)

---

٧ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د حيث د : ع ⟵ ع ، د (س) = أ س + ب يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات يساوى ٣ وحدات ويمر بالنقطة (١ ، ٥)، فأوجد قيمتى أ ، ب (كفر الشيخ ٢٠٢٠)

---

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٤ ، والدالة ر : ر (س) = س فأوجد كلًّا من:

١ د (٢) + ر (–٢)

٢ د (٤) + ر (–٤)

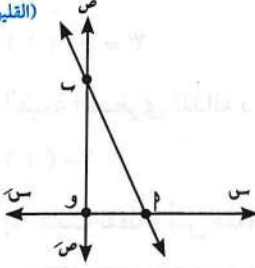
---

٩ إذا كانت د: د (س) = أ ، ر: ر (س) = ٣ س + أ حيث د ، ر دوال كثيرات حدود،

فإذا كانت د (٥) + ر (٣) = ١٥ ، فأوجد قيمة أ . (الغربية ٢٠٢٣)

## ١٠ الشكل المقابل:

(القليوبية ٢٠٢٣)



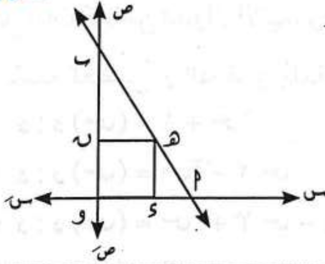

يمثل الدالة د حيث د (س) = ٤ − ٢ س

أوجد إحداثيى ٲ ، ب ، ومساحة سطح Δ ٲ و ب

---

## ١١ فى الشكل المقابل:

(الدقهلية ٢٠٢٢)




الدالة الخطية ر حيث ر (س) = ك س + م تمثل بيانيًا $\overleftrightarrow{ٲب}$

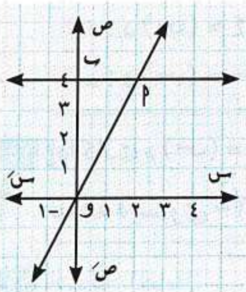
حيث ٲ (٣ ، ٠)، ب (٠ ، ٦)، الشكل و ى هـ ن مربع

١ اكتب قاعدة الدالة ر.

٢ أوجد مساحة المربع و ى هـ ن.

---

## ١٢ الشكل المقابل:




يوضح المستقيم $\overleftrightarrow{ٲب}$ الذى يمثل الدالة د حيث د (س) = ٤،

فإذا كان $\overleftrightarrow{ٲو}$ يمثل الدالة الخطية ر حيث ر (س) = ن س + ك،

وكانت مساحة سطح المثلث ٲ ب و تساوى ٤ وحدات مربعة

فأوجد قيمة كل من ن ، ك حيث و نقطة الأصل.

## ثالثًا الدالـة التربيعية:

## ١٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ نقطة رأس المنحنى للدالة د حيث د (س) = $س^٢$ + س + ٣ هى ..............

(ٲ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) $\left(\frac{-١}{٢} ، ٣\right)$ (د) $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{١١}{٤}\right)$

٢ إذا كانت النقطة ($\sqrt{٢}$ ، ٲ) ∈ منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ + ١ فإن ٲ = ..............

(ٲ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) −١

٣ معادلة خط تماثل منحنى الدالة د: حيث د (س) = $س^٢$ هى ..............

(ٲ) س = صفر (ب) س = ١ (جـ) س = ٢ (د) س = −١

٤ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٲ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن قيمة ٲ = ..............

(ٲ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ±١

٥ إذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هى رأس منحنى الدالة التربيعية د فإن معادلة خط التماثل هى ..............

(أ) س = ٣ (ب) س = ٢ (جـ) ص = ٢ (د) ص = -٣

٦ القيمة الصغرى للدالة د : د (س) = ٤ س + ٢ س^٢ + ٣ هى .............. (توجيه الشرقية)

(أ) -١ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٣

٧ إذا كانت نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية د هى (١ ، ٥) وكان د (-١) = -٣ فإن د (٣) = .........

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ١ (د) ٥

---

**١٤** مثل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثيى نقطة رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة حيث س ∈ ع:

١ د : د (س) = ١ + س^٢ مستعينًا بالفترة [-٣ ، ٣] (البحر الأحمر ٢٠٢٢)

٢ د : د (س) = س^٢ - ٢ س مستعينًا بالفترة [-٢ ، ٤]

٣ د : د (س) = س^٢ + ٣ س - ٤ مستعينًا بالفترة [-٤ ، ١]

٤ د : د (س) = ٣ - ٢ س - س^٢ مستعينًا بالفترة [-٤ ، ٢]

٥ د : د (س) = ٤ - س^٢ مستعينًا بالفترة [-٣ ، ٣] (القاهرة ٢٠٢٣)

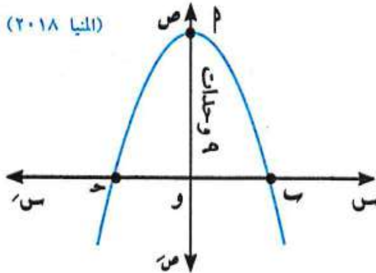
٦ د : د (س) = س (س - ٢) - ٣ مستعينًا بالفترة [-٢ ، ٤] (الدقهلية ٢٠١٧)

---

**١٥** إذا كانت د (س) = ك س^٢ + (٣ ك + ٢) س + ٦ ، وكان الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى الممثل للدالة د يساوى -٢، فأوجد قيمة ك (الدقهلية ٢٠٢٣)

---

**١٦** الشكل المقابل: (المنيا ٢٠١٨)




يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) = ك - س^٢

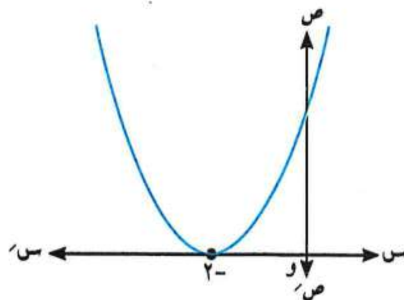
إذا كان أ و = ٩ وحدات طول. فأوجد:

١ قيمة ك ٢ إحداثيى ب ، حـ

٣ مساحة سطح المثلث المحدد بالنقط أ ، ب ، حـ

---

**١٧** الشكل المقابل:




يمثل منحنى الدالة د: د (س) = س^٢ + ٤ م س + ٥ - م

أوجد قيمة م.

## تفكير إبداعى TIMSS

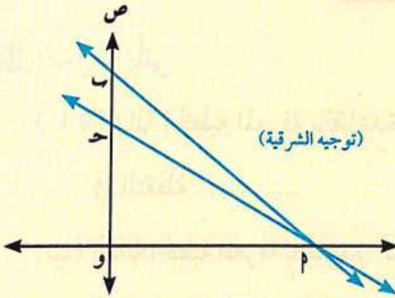
**١٨** فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أ ح}$ يُمثل بيانيًا للدالة الخطية د (س) = ٤ − $\frac{٤}{٣}$ س

$\overleftrightarrow{أ ب}$ يُمثل بيانيًا للدالة الخطية د (س) = ك س + م

فإذا كان إحداثى نقطة ب (٠ ، ٥)

**فأوجد** قيمة: ك ، م



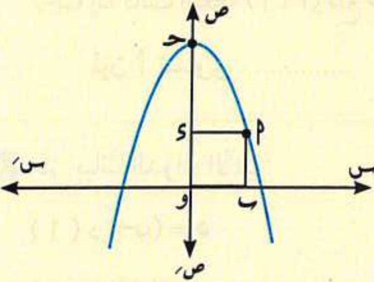

---

**١٩** الشكل المقابل:

يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) = ٢ − س$^{٢}$

حيث ح هى رأس المنحنى، الشكل أ ب و ء مربع.

**أوجد** إحداثيى نقطة أ



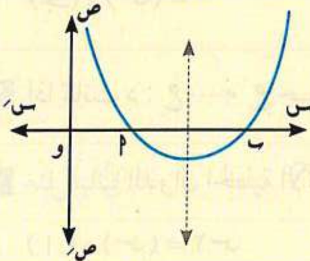

---

**٢٠** الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٤)

يمثل منحنى الدالة د (س) = س$^{٢}$ − ٦ س + م

وكان أ ب = ٢ وحدة طول. **أوجد** قيمة م.

**ثم أوجد** القيمة الصغرى للدالة.



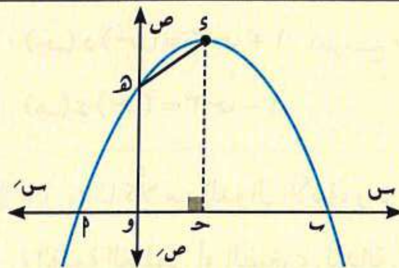

---

**٢١** الشكل المقابل:

يمثل منحنى الدالة د: د (س) = − س$^{٢}$ + ٢ س + ك − ١

حيث ء نقطة رأس المنحنى، وإحداثيا النقطة ب (٣ ، ٠)

**أوجد** مساحة الشكل و ح ء هـ



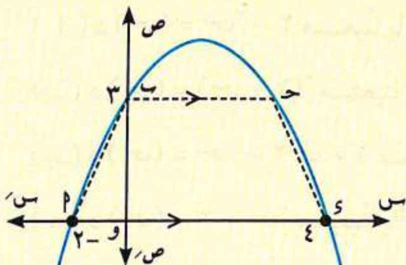

---

**٢٢** الشكل المقابل:

يمثل منحنى الدالة ص= د (س)

حيث أ (−٢ ، ٠) ، ب (٠ ، ٣) ، ء (٤ ، ٠)

**أوجد** مساحة الشكل أ ب ح ء



## تدريبات الكتاب المدرسى

**١** أكمل ما يأتى:

( ا ) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢س - ١ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ................

(ب) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٣س + ٦ يمثلها بيانيًا مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ........

(جـ) إذا كانت النقطة (ﺃ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ⟵ ع حيث د (س) = ٤س - ٥ فإن ﺃ تساوى .............. (مطروح ٢٠٢٤)

---

**٢** مثل بيانيًا الدوال الآتية:

( ا ) د (س) = ٥ (ب) د (س) = -٤

(جـ) د (س) = ٠ ( د ) د (س) = $\frac{1}{2}$٢

---

**٣** إذا كانت د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ٣ فاذكر درجة الدالة ثم أوجد: د (-٢) ، د (٠) ، د $\left(\frac{1}{2}\right)$

---

**٤** مثل بيانيًا الدوال الخطية الآتية، وأوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محورى الإحداثيات:

( ا ) د (س) = ٢س (ب) د (س) = -$\frac{1}{2}$ س

(جـ) د (س) = ٢س + ١ (كفر الشيخ ٢٠١٣) ( د ) د (س) = ٢ - س

(هـ) د (س) = ٣س - ١ ( و ) د (س) = -٢س + ٣

---

**٥** مثل بيانيًا كلًا من الدوال الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثيى نقطة رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة:

( ا ) د (س) = س$^{2}$ - ٢ مستعينًا بالفترة [-٣ ، ٣] (أسوان ٢٠٢٢)

(ب) د (س) = (س - ٢)$^{2}$ مستعينًا بالفترة [-١ ، ٥]

(جـ) د (س) = س$^{2}$ + ٢س + ١ مستعينًا بالفترة [-٤ ، ٢] (الغربية ٢٠٢٢)

( د ) د (س) = ٢ - س$^{2}$ مستعينًا بالفترة [-٣ ، ٣] (دمياط ٢٠٢٢)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: د (س) = ٣س-أ يمر بنقطة الأصل **فإن** أ = ............ (دمياط ٢٠٢٤)

(أ) -٣ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

٢ إذا كانت د (س) = ٥ تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات **فإنه** يمر بالنقطة ............ (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٥ ، ٠) (جـ) (٥ ، -٥) (د) (٠ ، ٠)

٣ إذا كانت النقطة (٢، أ-١) تقع على المستقيم الممثل للدالة د: د (س) = ٤س-٥ **فإن** أ = ............

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٢ (الغربية ٢٠١٧)

٤ إذا كانت د : د (س) = ١ **فإن**: د (١) + د (٢) = ............ (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٥ الدالة د : د (س) = ٢ س يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة ............ (قنا ٢٠٢٥)

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ١) (د) (٣ ، ٢)

٦ د (س) = ٢ س + أ ، د (٣) = ٥ **فإن** أ = ............ (سوهاج ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ١١ (د) -١١

---

## ٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س+ ب يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (أ+٢، ٣). **فأوجد** قيمة أ ، ب. (الغربية ٢٠٢٢)

٢ مثل بيانيًا منحنى الدالة د : د (س) = $(س + ١)^٢$ مستعينًا بالفترة [-٤ ، ٢] ، ومن الرسم **أوجد**:

(أ) نقطة رأس المنحنى. (ب) القيمة الصغرى للدالة. (أسيوط ٢٠٢٢)

٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = أ + $س^٢$، ل :ل (س) = حـ حيث د ، ل كثيرتا حدود ، أ ، حـ ثابتان، وكان ٣ د (٢) + ٣ ل (س) = ٦ **فأوجد** القيمة العددية للمقدار ٢ د (٠) + ٢ ل (٧). (الدقهلية ٢٠١٧)

| اختبار الأضواء على | الوحدة الأولى | ٣٠ |
|---|---|---|

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان س × ص = {(٢ ، ٣)} فإن ص^٢ = ………… (قنا ٢٠٢٤)

( أ ) {(٤ ، ٩)} (ب) {(٣ ، ٣)} (جـ) {(٢ ، ٢)} ( د ) {(٣ ، ٢)}

٢ النقطة (س − ٧ ، ٤ − س) حيث س ∋ ص تقع فى الربع الثالث، فإن س = ………… (المنوفية ٢٠٢٤)

( أ ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ ( د ) ٦

٣ إذا كانت: س = {٣ ، ٥ ، ٧} وكانت ع علاقة على س (بورسعيد ٢٠٢٤)

فإن: العلاقة التى تُمثل دالة من بين العلاقات الآتية هى …………

( أ ) ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٧)} (ب) ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٥)}

(جـ) ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)} ( د ) ع = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧)}

٤ إذا كانت: د (س) = ٣ ، فإن : د (٥) + د (−٥) = ………… (سوهاج ٢٠٢٤)

( أ ) ٦ (ب) ١ (جـ) صفر ( د ) −١

٥ إذا كانت د (س) = ٤ س + ب ، د (٣) = ١٥ فإن ب = …………

( أ ) ١٥ (ب) ٣ (جـ) ٤ ( د ) −٣

٦ إذا كان س ، ص مجموعتين غير خاليتين، وكان ٢^{ن(س)} = ٤^{ن(ص)} ، (الأقصر ٢٠٢٤)

فإن ن (س): ن (ص) = …………

( أ ) ١ : ١ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٢ ( د ) ٢ : ١

٧ إذا كانت: (٣ ، ص + ١) = (س ، ٥) فإن س ص = ………… (القاهرة ٢٠٢٥)

( أ ) −١٥ (ب) −٢ (جـ) ١٢ ( د ) ١٥

٨ الدالة د : د (س) = س^٢ − (س + ٣)^٢ كثيرة حدود من الدرجة ………… (أزهر القليوبية ٢٠٢٥)

( أ ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة ( د ) الرابعة

٩ إذا كانت الدالة د : د (س) = (أ + ٢) س^٢ + ٥ س + م تُمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل

فإن أ + م = …………

( أ ) −١ (ب) −٢ (جـ) صفر ( د ) ١

٢ ١ إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أن (أ + ب = ٥) لكل أ ∈ س ، لكل ب ∈ ص.

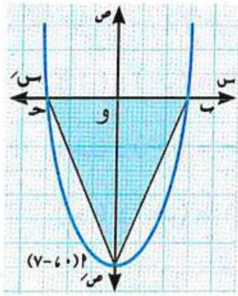
فاكتب بيان ع ومثِّلها بمخطط سهمى ، وهل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟

٢ إذا كان س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣)} فأوجد كلًّا مما يلى:

( ا ) س　　(ب) ص　　(جـ) (ص − س) × س

---

٣ الشكل المقابل:




يمثل الدالة د حيث د (س) = ل $س^٢$ − ٧ ،

مساحة سطح المثلث أ ب جـ تساوى ٢١ $سم^٢$، أ (٠ ، −٧)

أوجد: إحداثيى نقطة ب ثم أوجد: قيمة ل.

---

٤ إذا كان (٣−س ، ص + ٢) = (−٤ ، ٤)

فأوجد قيمة $\sqrt{س + ص}$

---

٥ مثل بيانيًّا منحنى الدالة: د (س) = $س^٢$ −٢س ، س ∈ [−٢ ، ٤]

ومن الرسم استنتج:

( ا ) معادلة محور التماثل.

(ب) القيمة الصغرى للدالة.

---

٦ أوجد: طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) على محور الصادات.

---

٧ مثل بيانيًّا: د (س) = ٣− س ومن الرسم

أوجد: نقطتى التقاطع مع محورى الإحداثيات.

**١** إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٤ ، ٧} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أن (أ + ب > ٦) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ،

فاكتب بيان ع ومثّلها بمخطط سهمي وآخر بيانى. **وهل ع دالة؟ اذكر السبب.**

---

**٢** مثل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية:

( ا ) د (س) = ٣ س − ١ (ب) د (س) = −٢ س

(جـ) د (س) = $س^٢$ − ٣ مستعينًا بالفترة [−٣ ، ٣]

( د ) د (س) = ١ −٣ س + $س^٢$ مستعينًا بالفترة [−١ ، ٤]

---

**٣** أثناء قراءة كريم لكتاب ما وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات من بداية القراءة تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقة بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هى علاقة خطية، فـ:

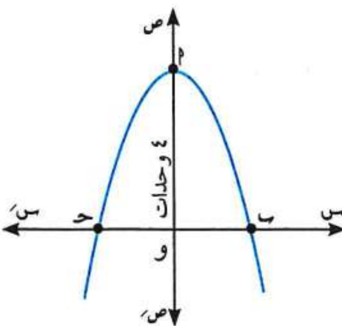
( ا ) مثل العلاقة بين ن، ص بيانيًا، ثم **أوجد العلاقة الجبرية بينهما.**

(ب) ما الوقت الذى ينتهى فيه كريم من قراءة الكتاب؟

(جـ) كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟

---

**٤** الشكل المقابل:




يمثل منحنى الدالة د حيث: د(س) = م − $س^٢$ ،

إذا كان أ و = ٤ وحدات طول فأوجد:

( ا ) قيمة م

(ب) إحداثيى كل من ب ، حـ

(جـ) مساحة سطح المثلث الذى رءوسه أ ، ب ، حـ

# الوحدة الثانية



# النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى



**أهداف دروس الوحدة** ◀ **بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

**الدرس الأول: النسبة والتناسب**

- يتعرف مفهوم النسبة.
- يتعرف خواص النسبة.
- يتعرف مفهوم التناسب.
- يتعرف خواص التناسب.

**الدرس الثانى: تابع خواص التناسب**

- يتعرف باقى عناصر التناسب.
- يستخدم خواص النسبة والتناسب فى حل العديد من المشكلات.

**الدرس الثالث: التناسب المتسلسل**

- يتعرف مفهوم التناسب المتسلسل.
- يتعرف الوسط المتناسب.

**الدرس الرابع: التغير الطردى والتغير العكسى**

- يتعرف مفهوم التغير الطردى.
- يتعرف مفهوم التغير العكسى.
- يميز بين التغير الطردى والتغير العكسى.
- يحل مسائل حياتية على التغير الطردى والتغير العكسى.


فيديو الشرح

ذاكر الدرس

# النسبـة والتناسـب

## فكر وناقش



• قام عادل بتقسيم فطيرة إلى ٥ أجزاء متساويـة وأكل منها جزءًا واحدًا.

فـإن: • نسبـة ما أكله عادل إلى الفطيرة بالكامل هى ١ : ٥ وقد تكتب: $\frac{١}{٥}$

• نسبــة ما تبقـى إلى الفطيــرة بالكامـل هى ٤ : ٥ وقد تكتب: $\frac{٤}{٥}$

• نسبة ما أكله عادل إلى ما تبقى من الفطيرة هى ١ : ٤ وقد تكتب: $\frac{١}{٤}$

---

• إذا كان لدينـا طريقان وكان طول الطريـق الأول ٣٠ كم ، وطول الطريق الثانى ٥٠ كم،

فـإن: • $\frac{\text{طول الطريق الأول}}{\text{طول الطريق الثانى}} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

• طول الطريق الأول = $\frac{٣}{٥}$ طول الطريق الثانى

• أكمل وأجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٣ \times ٣}{٥ \times ٣} = \frac{٣ \times ٤}{٥ \times ٤} = \frac{٣ \times (-٢)}{٥ \times (-٢)} =$ ............ وهكذا

هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى الصفر؟ ⟸ الإجابة : لا تتغير

(ب) $\frac{٣ + ٢}{٥ + ٢} = \frac{٥}{٧} \neq \frac{٣}{٥}$

• هل تتغير النسبة إذا أضفنا عددًا حقيقيًا لكل من حديها؟ ⟸ الإجابة : نعم تتغير

## أولًا النسبة وخواصها:

### تعريف

**النسبة:** هى المقارنة بالقسمة بين كميتين من نفس النوع ونفس الوحدة.

**النسبة بين كميتين:** هى عدد مرات احتواء إحدى الكميتين على الكمية الأخرى بشرط أن تكون الكميتان من نوع واحد ووحدة واحدة.

**فإذا كان:** ٲ ، ب عددين حقيقيين **فإن:** النسبة بين العدد ٲ والعدد ب **تُكتب بإحدى الصور**

ٲ إلى ب **أو** ٲ : ب **أو** $\frac{ٲ}{ب}$

حيث ٲ (يُسمى مقدم النسبة) ، ب (يُسمى تالى النسبة) ، ٲ ، ب معًا (يسميان حَدَّى النسبة)

**فمثلًا:** $\frac{٥}{٧}$ ← ٥ مقدم النسبة ، ٧ تالى النسبة

### خواص النسبة:

**خاصية ١** إذا ضرب كل من حدَّى النسبة فى (أو) (قسما على) عدد حقيقى لا يساوى الصفر،

**فإن:** قيمة النسبة لا تتغير.

**فمثلًا:** $\frac{٣}{٤} = \frac{٣ \times ٢}{٤ \times ٢} = \frac{٦}{٨} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣م}{٤م} = ...$ وهكذا (حيث م ≠ صفر)

$\frac{٩٠}{١٥٠} = \frac{٩٠ \div ٣}{١٥٠ \div ٣} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣٠ \div ٥}{٥٠ \div ٥} = \frac{٦}{١٠} = ...$ وهكذا

---

**خاصية ٢** إذا أُضيف إلى كلٍّ من حدى النسبة (أو) (طرح من كل منهما) عدد حقيقى لا يساوى الصفر،

**فإن:** قيمة النسبة تتغير، حيث قيمة النسبة ≠ ١

**فمثلًا:**

- النسبة $\frac{٣}{٧}$ إذا أضيف إلى كل من حديها **(٢)** أصبحت $\frac{٥}{٩}$ **لاحظ أن :** $\frac{٥}{٩} \neq \frac{٣}{٧}$
- النسبة $\frac{٥}{٨}$ إذا طرح من كل من حديها **(٣)** أصبحت $\frac{٢}{٥}$ **لاحظ أن :** $\frac{٢}{٥} \neq \frac{٥}{٨}$

---

- **إذا كان:** $\frac{ٲ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ **فإن:** ٲ = ٢ م ، ب = ٣ م (حيث م ∈ ع*)

## مثال ١

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ ، أوجد قيمة كل من:

١ $\frac{أ}{٢ب}$ ٢ $\frac{٤أ}{ب}$ ٣ $\frac{٥أ}{٧ب}$ ٤ $\frac{أ + ب}{ب}$

**الحل**

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ $\therefore$ أ = ٣م ، ب = ٤م

١ $\frac{أ}{٢ب} = \frac{٣م}{٢ \times ٤م} = \frac{٣}{٨}$

٢ $\frac{٤أ}{ب} = \frac{٤ \times ٣م}{٤م} = ٣$

٣ $\frac{٥أ}{٧ب} = \frac{٥ \times ٣م}{٧ \times ٤م} = \frac{١٥}{٢٨}$

٤ $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{٣م + ٤م}{٤م} = \frac{٧}{٤}$

**لاحظ أن**

إذا كان : ٤أ = ٣ب

فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$

## مثال ٢

إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ ، فأوجد قيمة النسبة: $\frac{٣س - ص}{٢ص - ٣س}$

**الحل**

$\because \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ $\therefore$ س = ٢م ، ص = ٥م

$\therefore \frac{٣س - ص}{٢ص - ٣س} = \frac{٣ \times (٢م) - ٥م}{٢ \times (٥م) - ٣ \times (٢م)} = \frac{٦م - ٥م}{١٠م - ٦م} = \frac{١م}{٤م} = \frac{١}{٤}$

## مثال ٣

**أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى حدى النسبة ٥ : ١٣ فإنها تصبح ٣ : ٥**

**الحل**

نفرض أن العدد هو س

$\therefore \frac{س + ٥}{س + ١٣} = \frac{٣}{٥}$ بضرب طرفى المعادلة فى ٥ (س + ١٣)

$\therefore ٥ (س + ١٣) \times \frac{(س + ٥)}{(س + ١٣)} = ٥ (س + ١٣) \times \frac{٣}{٥}$

$\therefore ٥ (س + ٥) = (س + ١٣) \times ٣$

$\therefore ٥س + ٢٥ = ٣س + ٣٩$ ⟸ ٥س − ٣س = ٣٩ − ٢٥

$\therefore ٢س = ١٤$ ⟸ س = ٧ العدد هو ٧

## مثال ٤

**أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة $\frac{٣}{٤}$ وطرح مربعه من تاليها نحصل على النسبة $\frac{٤}{٥}$**

**الحل**

نفرض أن العدد هو س ∴ مربعه هو $س^٢$ (حيث س ∈ $ع_+$)

∴ $\frac{٣ + س^٢}{٤ - س^٢} = \frac{٤}{٥}$ ∴ ٥(٣ + $س^٢$) = ٤(٤ - $س^٢$) ⟸ ١٥ + ٥$س^٢$ = ١٦ - ٤$س^٢$

∴ ٩$س^٢$ = ١ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٩}$ ⟸ س = $\frac{١}{٣}$ أو س = $\frac{-١}{٣}$ (مرفوض) العدد هو $\frac{١}{٣}$

## مثال ٥

عددان صحيحان النسبة بينهما $\frac{٢}{٣}$ ، فإذا أضيف ١ إلى العدد الأول وطرح ٣ من العدد الثانى أصبحت النسبة $\frac{٧}{٩}$ ، **فما هما العددان؟**

**الحل**

نفرض أن العدد الأول هو ٢ س فيكون العدد الثانى هو ٣ س

∴ $\frac{٢ س + ١}{٣ س - ٣} = \frac{٧}{٩}$ ⟸ ∴ ٧ (٣س - ٣) = ٩ (٢س + ١)

∴ ٢١ س - ٢١ = ١٨ س + ٩ ⟸ ٢١ س - ١٨ س = ٢١ + ٩

∴ ٣ س = ٣٠ ⟸ ∴ س = ١٠

∴ العدد الأول = ٢ × ١٠ = ٢٠ ، العدد الثانى = ٣ × ١٠ = ٣٠ أى أن العددين هما : ٢٠ ، ٣٠

### س؟ سؤال ١

١ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ **أوجد كلًا من:** (أ) $\frac{أ}{٢ب}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) $\frac{٢أ}{٥ب}$

٢ إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ **فأوجد قيمة النسبة:** $\frac{٣ س - ص}{٤ ص - ٢ س}$

٣ **أوجد العدد** الذى إذا طُرح من حدى النسبة $\frac{٤}{١١}$ كان الناتج $\frac{١}{٢}$

٤ **أوجد العدد** الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ١٩ : ٣٧ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة ٥ : ٣

٥ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ١٠ ، فإذا أُضيف للعدد الأول ٥ ، وطرح من العدد الثانى ٦ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٢ **فما هما العددان؟**

## مثال ٦

إذا كانت: $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ع}{ل} = \frac{٢}{٧}$ فأوجد قيمة النسبة: $\frac{٣ س ع - ص ل}{٧ س ع - ٢ ص ل}$

**الحل**

∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ∴ س = ٣ م ، ص = ٤ م

∵ $\frac{ع}{ل} = \frac{٢}{٧}$ ∴ ع = ٢ ن ، ل = ٧ ن

∴ $\frac{٣ س ع - ص ل}{٧ س ع - ٢ ص ل} = \frac{٣ \times (٣ م) \times (٢ ن) - (٤ م) \times (٧ ن)}{٧ \times (٣ م) \times (٢ ن) - ٢ \times (٤ م) \times (٧ ن)}$

$= \frac{١٨ م ن - ٢٨ م ن}{٤٢ م ن - ٥٦ م ن} = \frac{-١٠ م ن}{-١٤ م ن} = \frac{٥}{٧}$

## مثال ٧

إذا كان: $أ^٢ - ٤ أ ب + ٤ ب^٢$ = صفر ، فأوجد $\frac{أ}{ب}$ ، ومن ثم أوجد قيمة النسبة: $\frac{أ + ٣ ب}{٢ أ + ٤ ب}$

**الحل**

∵ $أ^٢ - ٤ أ ب + ٤ ب^٢$ = صفر

∴ $(أ - ٢ ب)^٢$ = صفر ⟸ أ - ٢ ب = صفر

∴ أ = ٢ ب ومنها $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{١}$ بفرض أن: أ = ٢ م ، ب = م

∴ $\frac{أ + ٣ ب}{٢ أ + ٤ ب} = \frac{٢ م + ٣ م}{٤ م + ٤ م} = \frac{٥ م}{٨ م} = \frac{٥}{٨}$

### سؤال ؟

١ إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ع}{ل} = \frac{٥}{٧}$ فأوجد قيمة النسبة: $\frac{٢ س ع - ٥ ص ل}{٣ ص ل - ٥ س ع}$

٢ إذا كان: $٢ س^٢ - ١٢ س ص + ١٨ ص^٢$ = صفر ، فأوجد: $\frac{س}{ص}$

## ثانيًا التناسب:

### تعريف

**التناسب:** هو تساوى نسبتين أو أكثر.

- إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن: الكميات أ ، ب ، ج ، د تكون متناسبة
- إذا كانت: الكميات أ ، ب ، ج ، د متناسبة فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$
- نسمى أ **الأول المتناسب** ، ب **الثانى المتناسب** ، ج **الثالث المتناسب** ، د **الرابع المتناسب**
- نسمى أ ، د **طرفى التناسب** ، ب ، ج **وسطى التناسب**

### خواص التناسب :

**خاصية (١)** إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن: أ = جك ، ب = دك (حيث ك ∈ ع*)

**خاصية (٢)** إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن: أ × د = ب × ج (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

يمكننا إثبات ذلك هكذا: ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ (بضرب النسبتين × ب د)

∴ $\frac{أ}{ب}$ × ب د = $\frac{ج}{د}$ × ب د ∴ أ د = ب ج

**فمثلًا:** إذا كان: $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ فإن: ٦ × ٥ = ٣ × ١٠

## مثال ٨

أوجد الثالث المتناسب للكميات: ٨ ، ٩ ، ..... ، ٢٧

**الحل**

نفرض أن الثالث المتناسب هو س ∴ الكميات ٨ ، ٩ ، س ، ٢٧ متناسبة

∴ $\frac{٨}{٩} = \frac{س}{٢٧}$ ⟸ ٩ × س = ٨ × ٢٧ ⟸ س = $\frac{٨ × ٢٧}{٩}$ = ٢٤

### سؤال ٣

١ أوجد الثانى المتناسب للأعداد ١٦ ، .......... ، ٨ ، ١١

٢ أوجد الرابع المتناسب للكميات أ ، ب ، $أ^{٢}$ ، ..........

## مثال ٩

**أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادًا متناسبة.**

**الحل**

نفرض أن العدد هو س فتكون الأعداد ٣ + س ، ٥ + س ، ٩ + س ، ١٣ + س متناسبة.

$\therefore \frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٩ + س}{١٣ + س}$

$\therefore (٣ + س)(١٣ + س) = (٩ + س)(٥ + س)$

$\therefore ٣٩ + ١٦س + س^٢ = ٤٥ + ١٤س + س^٢$

$١٦س - ١٤س = ٤٥ - ٣٩ \quad \Leftarrow \quad \therefore ٢س = ٦$

$\therefore س = ٣ \quad\quad \therefore$ العدد هو ٣

## مثال ١٠

**إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ فأثبت أن: (٢س + ص) ، (س + ٢ص) ، ٦ ، ٨ كميات متناسبة.**

**الحل**

**لاحظ أن**

المطلوب إثبات أن:

$\frac{٢س + ص}{س + ٢ص} = \frac{٦}{٨}$

$\because \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$

$\therefore$ س = ٢ م ، ص = ٥ م (حيث م ≠ صفر) وبالتعويض عن س ، ص

$\therefore \frac{٢س + ص}{س + ٢ص} = \frac{٢ \times ٢م + ٥م}{٢م + ٢ \times ٥م} = \frac{٤م + ٥م}{٢م + ١٠م} = \frac{٩م}{١٢م} = \frac{٣}{٤}$

$\because \frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$

$\therefore$ (٢س + ص) ، (س + ٢ص) ، ٦ ، ٨ كميات متناسبة.

## سؤال ٤

١. **أوجد العدد** الذى إذا طرح من كل الأعداد ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ أصبحت أعدادًا متناسبة.
٢. **أوجد العدد** الذى إذا أضيف إلى الأعداد ٤ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ أصبحت أعدادًا متناسبة.



### نقاط هامة

- إذا كان: $أ \times د = ب \times حـ$ فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$

## مثال ١١

إذا كان: $\frac{س + ٢ص}{٤س - ٣ص} = \frac{٧}{٦}$ فأوجد فى أبسط صورة $\frac{س}{ص}$

**الحل**

$\because \frac{س + ٢ص}{٤س - ٣ص} = \frac{٧}{٦} \Leftarrow ٦(س + ٢ص) = ٧(٤س - ٣ص)$

$\therefore ٦س + ١٢ص = ٢٨س - ٢١ص$

$\therefore ١٢ص + ٢١ص = ٢٨س - ٦س$

$\therefore ٣٣ص = ٢٢س$ $\quad \therefore \frac{س}{ص} = \frac{٣٣}{٢٢} = \frac{٣}{٢}$

## مثال ١٢

إذا كان: $\frac{أ + حـ}{ب + د} = \frac{أ}{ب}$، فأثبت أن: أ ، ب ، حـ ، د كميات متناسبة.

**الحل**

$\because \frac{أ + حـ}{ب + د} = \frac{أ}{ب}$ $\quad \therefore أب + ب حـ = أب + أد \Leftarrow ب حـ = أ د$

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ $\quad \therefore$ أ ، ب ، حـ ، د كميات متناسبة.

### سؤال ٥

(١) إذا كان: $٢أ - ٥ب =$ صفر، فأوجد قيمة: $\frac{أ}{ب}$

(٢) إذا كان: $\frac{٢أ - ٣ب}{أ + ٢ب} = \frac{٤}{٩}$، فأثبت أن: $\left(\frac{ب}{أ}\right)^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$

(٣) إذا كان: $\frac{٥أ + ٣حـ}{٥ب + ٣د} = \frac{أ + حـ}{ب + د}$، فأثبت أن: أ ، ب ، حـ ، د كميات متناسبة.

**خاصية (٣)** إذا كانت: $ﻫ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $ء$ كميات متناسبة فإن: $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{ح}{ء} = م$

ويكون: $ﻫ = ب م$ ، $ح = ء م$ (حيث $م \in ع^*$)

## مثال ١٣

إذا كانت الكميات $ﻫ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $ء$ متناسبة، فأثبت أن:

١ $\frac{(ﻫ - ح)^٢}{(ب - ء)^٢} = \frac{ﻫ ح}{ب ء}$

٢ $\frac{٣ﻫ + ٤ح}{٨ﻫ - ٦ح} = \frac{٣ب + ٤ء}{٨ب - ٦ء}$

**الحل**

نفرض أن: $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{ح}{ء} = م$ $\therefore ﻫ = ب م$ ، $ح = ء م$

١ الطرف الأيمن $= \frac{(ب م - ء م)^٢}{(ب - ء)^٢} = \frac{[م(ب - ء)]^٢}{(ب - ء)^٢} = \frac{م^٢ (ب - ء)^٢}{(ب - ء)^٢} = م^٢$ ——— ①

الطرف الأيسر $= \frac{ﻫ ح}{ب ء} = \frac{ب م \times ء م}{ب ء} = \frac{ب ء م^٢}{ب ء} = م^٢$ ——— ②

من ① ، ② ينتج أن: الطرفين متساويان

٢ الطرف الأيمن $= \frac{٣ﻫ + ٤ح}{٨ﻫ - ٦ح} = \frac{٣ب م + ٤ء م}{٨ب م - ٦ء م} = \frac{م(٣ب + ٤ء)}{م(٨ب - ٦ء)} = \frac{٣ب + ٤ء}{٨ب - ٦ء}$ = الطرف الأيسر

## مثال ١٤

إذا كان: $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٣}$ فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{٢س - ص + ع}{٣س + ص - ع}$

**الحل**

نفرض أن: $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٣} = م$ $\therefore س = ٢م$ ، $ص = ٥م$ ، $ع = ٣م$

$\therefore \frac{٢س - ص + ع}{٣س + ص - ع} = \frac{٢(٢م) - ٥م + ٣م}{٣(٢م) + ٥م - ٣م} = \frac{٤م - ٥م + ٣م}{٦م + ٥م - ٣م} = \frac{٢م}{٨م} = \frac{١}{٤}$

### سؤال ٦

① إذا كان: $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ فأثبت أن: $\frac{ﻫ + ب}{ب} = \frac{ح + ء}{ء}$ (الغربية ٢٠١٩)

② إذا كان: $س = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ فأوجد قيمة النسبة: $\frac{س + ص - ٢ع}{س - ٣ع}$

③ إذا كان: $ﻫ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $ء$ كميات متناسبة فأثبت أن: $\frac{ﻫ - ح}{ب - ء} = \sqrt{\frac{ﻫ ح}{ب ء}}$



## نقاط هامة

- إذا كان: ؟ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و كميات متناسبة فإن: $\frac{؟}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = م$

ويكون ؟ = ب م ، حـ = ء م ، هـ = و م (حيث م ∈ ع*)

## مثال ١٥

إذا كانت الكميات ؟ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و متناسبة.

فأثبت أن: $\frac{٣؟ + ٥حـ - ٢هـ}{٣ب + ٥ء - ٢و} = \frac{؟ + ٢هـ}{ب + ٢و}$

**الحل**

نفرض أن: $\frac{؟}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = م$

∴ ؟ = ب م ، حـ = ء م ، هـ = و م

الطرف الأيمن = $\frac{٣(ب م) + ٥(ء م) - ٢(و م)}{٣ب + ٥ء - ٢و} = \frac{م(٣ب + ٥ء - ٢و)}{(٣ب + ٥ء - ٢و)} = م$ ——— ①

الطرف الأيسر = $\frac{ب م + ٢(و م)}{ب + ٢و} = \frac{م(ب + ٢و)}{(ب + ٢و)} = م$ ——— ②

من ① ، ② الطرفان متساويان

## مثال ١٦

إذا كان: $\frac{؟}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فأثبت أن: $\frac{١}{؟} + \frac{٢}{ب} + \frac{٣}{حـ} + \frac{٤}{ء} = \frac{١}{ب حـ}(ء + ٢حـ + ٣ب + ٤؟)$

**الحل**

نفرض أن: $\frac{؟}{ب} = \frac{حـ}{ء} = م$ ∴ ؟ = ب م ، حـ = ء م

الطرف الأيمن = $\frac{١}{ب م} + \frac{٢}{ب} + \frac{٣}{ء م} + \frac{٤}{ء} = \frac{١}{ب م ء}(ء + ٢م ء + ٣ب + ٤ب م)$

$= \frac{١}{ب حـ}(ء + ٢حـ + ٣ب + ٤؟)$ = الطرف الأيسر

### س؟ سؤال ٧

إذا كان: $\frac{؟}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و}$ فأثبت أن: $\sqrt{\frac{؟^٢ - حـ^٢ - هـ^٢}{ب^٢ - ء^٢ - و^٢}} = \frac{؟}{ب}$



أسئلة تفاعلية

تدرّب الدرس

## النسبة والتناسب

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

## تدريبات الأضواء

### أولًا النسبة وخواصها:

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ ٢٠٪ من ٥٠٠ جنيه = .................. جنيه. (قنا ٢٠٢٣)

(أ) ٢٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ١٠٠

٢ ٢٧ شهرًا : ٣ سنوات = .................. فى أبسط صورة. (الدقهلية ٢٠٢٢)

(أ) ٩ : ١ (ب) ١ : ٩ (جـ) ٣ : ٤ (د) ٩ : ١٠

٣ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٧}$ فإن: $\frac{٧أ}{٢ب} =$ ..................

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤٩}{٤}$

٤ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٢}$ فإن: $\frac{٢أ}{ب} =$ ..................

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

٥ إذا كان: ٥س = ٨ص فإن $\frac{س}{ص} =$ ..................

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) $\frac{٨}{١٠}$ (د) $\frac{٥}{١٦}$

٦ إذا كان: ٧أ = ١٤ب ، فإن: $\frac{ب}{أ} =$ ..................

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) −٢ (د) $\frac{-١}{٢}$

٧ إذا كان : ٣أ = $\frac{٥}{٦}$ب ، فإن: $\frac{أ}{ب} =$ .................. (المنوفية ٢٠٢٣)

(أ) $\frac{١٨}{٥}$ (ب) $\frac{١٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{١٥}$ (د) $\frac{٥}{١٨}$

٨ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ ، وكان ٥أ − ٢ب = ٢٠، فإن: ب = ..................

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٥

٩ إذا كان: $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٦}$ ، وكان ٦أ + ٥ب = ٦٠، فإن أ = ..................

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٦٠ (د) ١١

١٠ إذا كان: $\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٥}$ ، وكان ٥ أ + ٤ ب = ٨٠، فإن: أ + ب = ..................

( أ ) ٨  (ب) ٩  (جـ) ١٠  ( د ) ١٨

١١ إذا كان: ٤ أ − ٣ ب = صفر ، فإن أ : ب = .................. (الغربية ٢٠١٨)

( أ ) ٣ : ٤  (ب) ٣ : ٧  (جـ) ٤ : ٣  ( د ) ٤ : ٧

١٢ إذا كان: ٢ أ − ب = صفر، فإن: $(\frac{أ}{ب})^{-٣}$ = ..................

( أ ) ٨  (ب) −٨  (جـ) $\frac{-١}{٨}$  ( د ) $\frac{١}{٨}$

١٣ إذا كان: ٢ س = ٧ ص ، فإن: $(\frac{ص}{س})^{-١}$ = ..................

( أ ) $\frac{٢}{٧}$  (ب) $\frac{٧}{٢}$  (جـ) $\frac{٤٩}{٧}$  ( د ) $\frac{٤}{٤٩}$

١٤ إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ، فإن: $\frac{س + ص}{ص}$ = ..................

( أ ) $\frac{١}{٤}$  (ب) $\frac{٣}{٤}$  (جـ) $\frac{٤}{٧}$  ( د ) $\frac{٧}{٤}$

١٥ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٦}{٥}$ ، فإن: $\frac{أ + ب}{أ − ب}$ = ..................

( أ ) $\frac{٦}{٥}$  (ب) ١١  (جـ) −٣  ( د ) ١

١٦ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ ، فإن: $\frac{٢ أ + ب}{٣ أ − ب}$ = ..................

( أ ) $\frac{٢}{٥}$  (ب) $\frac{١}{٩}$  (جـ) ٩  ( د ) $\frac{٥}{٢}$

١٧ إذا كان: $\frac{أ^٢}{ب^٢} = \frac{١٦}{٢٥}$ ، فإن: $\frac{ب}{أ}$ = ..................

( أ ) $\frac{٢٥}{١٦}$  (ب) $\frac{٥}{٤}$  (جـ) $\frac{-٥}{٤}$  ( د ) ± $\frac{٥}{٤}$

١٨ إذا كان: ٩ $س^٢$ = ٤ $ص^٢$ ، فإن: $\frac{س}{ص}$ = ..................

( أ ) $\frac{٣}{٢}$  (ب) ± $\frac{٣}{٢}$  (جـ) $\frac{٢}{٣}$  ( د ) ± $\frac{٢}{٣}$

١٩ إذا كان: ٨ $س^٣$ + ٢٧ $ص^٣$ = صفر ، فإن: $\frac{س}{ص}$ = ..................

( أ ) $\frac{٢}{٣}$  (ب) $\frac{٣}{٢}$  (جـ) $\frac{-٢}{٣}$  ( د ) $\frac{-٣}{٢}$

٢٠ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{٣}{٥}$ ، فإن: $\frac{أ}{ب + جـ} =$ ..................

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٦}{١٩}$ (جـ) $\frac{٩}{١٠}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

---

## ٢ أجب عما يأتى:

١ ما العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١٢ فإنها تصبح ٢ : ٣ (الدقهلية ٢٠٢١)

٢ أوجد العدد الذى إذا طرح من حدى النسبة ٢٦ : ٣٣ أصبحت ٣ : ٤

٣ أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة $\frac{٣}{١٠}$ أصبحت $\frac{١}{٢}$ (الجيزة ٢٠٢٣)

٤ ما العدد الذى إذا طرح مربعه من حدى النسبة $\frac{١٣}{١٥}$ أصبحت $\frac{٢}{٣}$

٥ عددان حقيقيان النسبة بينهما ٣ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ٤ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٢ فما العددان؟ (الفيوم ٢٠٢٢)

٦ عددان صحيحان موجبان ، النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف للأول ٤ وطرح من الثانى ٤ صارت النسبة بينهما ٢ : ١ أوجد العددين. (بنى سويف ٢٠٢٣)

٧ إذا كان $\frac{أ}{ب} = ٢$ فأوجد قيمة النسبة $\frac{٨ أ + ٥ ب}{٧ أ - ٢ ب}$ (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

٨ إذا كانت س : ص = ٢ : ٣ فأوجد قيمة النسبة $\frac{٣ س + ٢ ص}{ص - س}$ (المنوفية ٢٠٢٢)

٩ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ فأوجد قيمة النسبة $\frac{٩ أ - ٢ ب}{٤ ب - ٢ أ}$ (الدقهلية ٢٠١٩)

١٠ إذا كان: ٥ أ = ٣ ب فأوجد قيمة النسبة $\frac{٧ أ + ٩ ب}{٤ أ + ب}$ (المنوفية ٢٠١٨)

١١ إذا كان: $\frac{٤ س}{٣ ص} = ١$ فأوجد قيمة النسبة $\frac{٥ س - ٢ ص}{٣ س + ص}$

١٢ أوجد س : ص : ع حيث: $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ص}{ع} = \frac{٤}{٧}$

١٣ إذا عُلم أن س - ص + ع = ٠ ، ١٠ س + ٢ ع - ٥ ص = ٠ فأوجد قيمة كل من النسبتين $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ص}{ع}$

١٤ إذا كانت النسبة بين مساحة مستطيل ومساحة المربع المنشأ على أحد قطريه $\frac{١٢}{٢٥}$ ، فأوجد النسبة بين بُعديه.

١٥ إذا كان: $س^٢ - ٦ ص^٢ = ٥ س ص$ فأوجد س : ص

## ثانيًا التناسب:

### ٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الرابع المتناسب للكميات ٦ ، ٢١ ، ١٠ هو .............. (الشرقية ٢٠١٧)

(أ) ٢٥ (ب) ٣٥ (جـ) ١٥ (د) ٤٥

٢ إذا كانت: ٤ ، س ، ١٢ ، ١٨ كميات متناسبة، فإن س = ..............

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ٥٤

٣ إذا كان: ٣ ، ٩ ، س ، ٣٦ كميات متناسبة، فإن قيمة س = ..............

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٤ الرابع المتناسب للكميات ٣ ، ٦ ، ٦ هو .............. (جنوب سيناء ٢٠١٩)

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ١

٥ إذا كان: ٢٤ ، س ، ٦ ، ٣ كميات متناسبة، فإن س = .............. (الإسماعيلية ٢٠١٣)

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٤٨

٦ إذا كان: م ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة، فإن: $\frac{ب}{م}$ = .............. (القليوبية ٢٠١٦)

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

٧ إذا كانت: م ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة، فإن: $\frac{م ء - ب حـ}{م^٢ + ب^٢ + حـ^٢}$ = .............. (الشرقية ٢٠١٩)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ م : ب = $م^٢$ : .......... حيث م ≠ ب ≠ صفر

(أ) $ب^٢$ (ب) م ب (جـ) $م^٢$ ب (د) م $ب^٢$

٩ الثانى المتناسب للكميات ١٢ م $ب^٢$ ، .............. ، ٢١ م ب ، ١٤ $ب^٢$ هو ..............

(أ) ٨ م $ب^٢$ (ب) ٨ $ب^٣$ (جـ) ٢٤ م ب (د) ٢٤ $ب^٤$

١٠ إذا كان: $\frac{م + ب}{٥} = \frac{م - ب}{٣}$ ، فإن: $\frac{م}{ب}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

١١ إذا كان: $\frac{٥ م - ٧ ب}{١٨ م + ١١ ب}$ = صفر ، فإن: $\frac{ب}{م}$ = ..............

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) $\frac{١١}{١٨}$

١٢ إذا كان: $\frac{س + ٢ص}{س - ص} = \frac{٢}{٣}$ ، فإن: $\frac{ص}{س}$ = ....................

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) ٨ (جـ) $\frac{-١}{٨}$ (د) -٨

١٣ إذا كان: ٤ $س^٢$ + ٩ $ص^٢$ = ١٢ س ص ، فإن: $\frac{س}{ص}$ = ....................

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

١٤ إذا كان: $\frac{٢أ}{٣} = \frac{٣ب}{٢} = \frac{٥حـ}{٤}$ ، فإن: $\frac{٢أ + ٣ب + ٥حـ}{٦أ + ٦ب + ١٠حـ}$ = ....................

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{٥}{١١}$

---

**٤** إذا كانت الكميات التالية متناسبة، **فأوجد قيمة س:**

(أ) ٨ ، س، ٤ ، ٥ (ب) ١١ ، ٣ ، س ، ٦ (جـ) ٦ ، ٢٤ ، ١ ، س

---

**٥ أجب عن الأسئلة التالية:**

١ أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ........ ، ٦ ، ٩

٢ أوجد الثالث المتناسب للكميات: ٥أ ب ، ١٠ $أ^٢$ ، ........ ، ٤ $أ^٢$ ب

٣ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد: ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة. (أسيوط ٢٠١٨)

٤ إذا كان: أ - ١ ، ب - ٢ ، أ + ١ ، ب + ٢ كميات متناسبة، فأوجد أ : ب

---

**٦** إذا كان: $\frac{ب}{أ + ب} = \frac{د}{حـ + د}$ ، **فأثبت أن:** أ ، ب ، حـ ، د كميات متناسبة.

---

**٧** إذا كان: $\frac{٣أ - ٢حـ}{٣ب - ٢د} = \frac{أ}{ب}$ **فأثبت أن:** أ ، ب ، حـ ، د كميات متناسبة. (الشرقية ٢٠١٨)

---

**٨** إذا كان: $\frac{٣س + ع}{٣ص + ل} = \frac{س - ع}{ص - ل}$ **فأثبت أن:** $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$

---

**٩** إذا كان: $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{حـ}{د - حـ}$ **فأثبت أن:** أ ، ب ، حـ ، د كميات متناسبة. (الجيزة ٢٠١٣)

---

**١٠** إذا كان: ل (س - أ ص) = ص (ع - أ ل)، **فأثبت أن:** س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة.

---

**١١ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى:**

(أ) ٢س + ٥ : ٣س - ٣ = ٥ : ٤ (ب) $س^٢$ - ٥ : ٣س + ١ = ٢ : ١

**١٢** إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ **فأثبت أن:** ١٦ ، (أ + ٢ب) ، ١٢ ، (٢أ + ب) كميات متناسبة.

**١٣** إذا كان: $\frac{س + ٣ص}{س - ٢ص} = ٣$ **فأوجد:** $\frac{س}{ص}$

**١٤** إذا كان: ٣ص − ٥س : ٣س + ص = ٣ : ٨ **فأوجد** فى أبسط صورة النسبة س : ص

**١٥** إذا كان: أ ، ب، جـ، د أربع كميات متناسبة **فأثبت أن:**

(أ) $\frac{أ س - ب ص}{أ ط + ب ن} = \frac{جـ س - د ص}{جـ ط + د ن}$  (ب) $\frac{أ + ب + جـ + د}{أ + ب} = \frac{ب + د}{ب}$  (جـ) $\frac{٥أ^{٢} + ٢جـ^{٢}}{٥ب^{٢} + ٢د^{٢}} = \frac{أ جـ}{ب د}$

**١٦** إذا كان: أ ، ب، جـ ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{جـ}{د - جـ}$ (الغربية ٢٠٢٣)

**١٧** إذا كان: أ ، ب، جـ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{أ^{٢} - ٢أ جـ + جـ^{٢}}{أ جـ} = \frac{ب^{٢} - ٢ب د + د^{٢}}{ب د}$ (الإسماعيلية ٢٠١٨)

**١٨** إذا كان: جـ ، د ، س ، ص كميات موجبة وكان $\frac{جـ}{د} = \frac{س}{ص}$

**فأثبت أن:** $\frac{جـ^{٢} س + د^{٢} ص}{جـ + د} = \frac{جـ (س^{٢} - س ص + ص^{٢})}{س}$

**١٩** إذا كان: أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{٥أ + ٧جـ}{٥ب + ٧د} = \frac{٩أ - جـ}{٩ب - د}$ (بنى سويف ٢٠٢٣)

**٢٠** إذا كان: أ ، ب، جـ، د أربع كميات متناسبة

**فأثبت أن:** $\frac{أ جـ^{٢}}{د^{٣}} = \frac{(أ + ب)(أ - جـ)(أ^{٢} + جـ^{٢})}{(جـ + د)(ب - د)(ب^{٢} + د^{٢})}$

**٢١** إذا كانت: $\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{جـ}{ع}$ **فأثبت أن:** $\frac{أ + ب}{س + ص} = \frac{ب + جـ}{ص + ع} = \frac{جـ + أ}{ع + س}$

**٢٢** إذا كان: $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ **فأوجد قيمة النسبة:** $\frac{٢س + ٣ص}{٧ع - ٢ص}$ (الجيزة ٢٠٢٤)

**٢٣** إذا كان: $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٢} = \frac{جـ}{٥}$ **فأثبت أن:** $\frac{أ - ٢ب + ٣جـ}{٢أ + ب + جـ} = \frac{١٤}{١٣}$ (الشرقية ٢٠٢٤)

**٢٤** إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ **فأثبت أن:** $\sqrt[٣]{\frac{٧أ^{٢} جـ + ٥أ هـ^{٢} - ٢جـ هـ^{٢}}{٧ب^{٢} د + ٥ب و^{٢} - ٢د و^{٢}}} = \frac{أ + جـ + هـ}{ب + د + و}$

**٢٥** إذا كانت: $\frac{٣أ + جـ}{٣ب + د} = \frac{أ - جـ}{ب - د}$ **فأثبت أن:** $\frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$

٢٦ إذا كانت: أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤، **فبرهن أن:** $\sqrt{\text{٣أ}^{٢} + \text{٤ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢}} = \text{٤ أ}$

٢٧ إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} = \frac{٣}{٥}$ ، أ + ب + حـ = ٧٥ **فأوجد** قيمة كل من: أ، ب، حـ (البحر الأحمر ٢٠١٦)

٢٨ إذا كان: ٤أ = ٣ب = ٦حـ ، أ + ب + حـ = ٣٦ **فأوجد** قيمة كل من: أ ، ب ، حـ (الفيوم ٢٠٢٢)

٢٩ إذا كان: أ : ب : حـ = ١ : ٢ : ٣ وكان ب + حـ = ٢٥ فأوجد قيمة كل من: أ ، ب، حـ (القليوبية ٢٠١٦)

٣٠ إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ **فأثبت أن:** $\frac{\text{أ ع} + \text{حـ س}}{\text{ب ل} + \text{ء ص}} = \sqrt{\frac{\text{أ حـ ع س}}{\text{ب ء ل ص}}}$

٣١ إذا كان: أ − ١، أ + ١، ب − ٢، ب + ٢ كميات متناسبة، **فأثبت أن:** $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ} + \text{ب} - ٣} = \frac{\text{٣أ}}{\text{٥أ} - \text{ب} - ٣}$

**تفكير إبداعى TIMSS**

٣٢ **أوجد** النسبة التى لا تتغير قيمتها إذا طرح من مقدمها ٦ وطرح من تاليها ٤؟

٣٣ إذا كان (س$^{٢}$ + ١): (٥س − ٢) = ٢ : ٣ **فأوجد قيمة** س

٣٤ **أوجد** العدد الموجب الذى إذا أضيف معكوسه الضربى إلى تالى النسبة $\frac{٢}{٣}$ أصبحت $\frac{٣}{٥}$

٣٥ إذا كانت ط : ن : ع = ٢ : −٣ : ٤ **فأثبت أن:** $\frac{\sqrt{\text{٢ط}} + \sqrt{\text{ن} + \text{ع}}}{٨\sqrt{\text{ط} + \text{٣ن} + \text{٢ع}}} = \frac{\text{٥ط}^{٣} - \text{ن}^{٣} - \text{ع}^{٣}}{\text{ط}^{٣}}$

٣٦ أربعة أعداد متناسبة، فإذا كان الثانى المتناسب هو الجذر التربيعى الموجب للرابع المتناسب، والأول المتناسب ينقص ١ عن الثانى المتناسب، والثالث المتناسب هو ٦ ،

**فأوجد تلك الأعداد الأربعة.**

## تدريبات الكتاب المدرسى

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ فأوجد العددين. (الإسماعيلية ٢٠١٧)

٢ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ ، وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ فأوجد العددين. (الشرقية ٢٠٢٢)

٣ أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

٤ أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥ (الأقصر ٢٠١٨)

٥ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥ (بنى سويف ٢٠٢٢)

٦ إذا كان ﻫ : ب : حـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان ﻫ + ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كلٍّ من ﻫ ، ب ، حـ

٧ أوجد كلًا من:

( ا ) الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ..... ، ٤ ، ٦

(ب) الثالث المتناسب للأعداد ٨ ، ٦ ، ..... ، ١٢

٨ إذا كان: $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة: ٧ﻫ + ٩ب : ٤ﻫ + ٢ب

٩ إذا كان: $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فأثبت أن: $\frac{ﻫ - ب}{ب} = \frac{حـ - ء}{ء}$

١٠ إذا كان: س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة فأثبت أن: $\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^٢ = \frac{٢س^٢ - ٣ص^٢}{٢ع^٢ - ٣ل^٢}$

١١ إذا كان: ﻫ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فأثبت أن:

( ا ) $\frac{ﻫ حـ}{ب ء} = \left(\frac{ﻫ - حـ}{ب - ء}\right)^٢$ (أسوان ٢٠٢٢)

(ب) $\sqrt[٣]{\frac{٥ﻫ^٣ - ٣حـ^٣}{٥ب^٣ - ٣ء^٣}} = \frac{ﻫ + حـ}{ب + ء}$ (القليوبية ٢٠١٩)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها (ل) سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها (٢ل) سم هى ........ : ........ (المنوفية ٢٠١٥)

(أ) ١ : ٢ (ب) ل : ٤ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٢ إذا كان: ٢أ = ٣ب فإن: $\frac{٣أ}{٢ب}$ = ........ (الدقهلية ٢٠١٨)

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

٣ إذا كانت الكميات ٢ ، ٣ ، ٦ ، س − ١ متناسبة، فإن: س = ........ (المنوفية ٢٠١٨)

(أ) ١٨ (ب) ٩ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو ........ (بنى سويف ٢٠٢٠)

(أ) ٢٤ (ب) ± ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ± ٤٨

٥ إذا كان: $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$ فإن: ٥أ − ٣ب + ٤ = ........ (المنوفية ٢٠١٩)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٦ إذا كان ٥أ$^{٢}$ + ٣أ ب − ٢ب$^{٢}$ = ٠ حيث أ ∈ $ح_{+}$ ، ب ∈ $ح_{+}$ فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ........

(أ) $\frac{-٥}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

---

## ٢ أجب عن الأسئلة التالية:

١ إذا كان: $\frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣}$ فأثبت أن: (٢س − ٣ص) ، (س + ٢ص) ، ١٠ ، ٢٦ كميات متناسبة. (الأقصر ٢٠١٩)

٢ أوجد العدد الموجب الذى إذا أُضيف مربعه إلى مقدم النسبة ١٧ : ١٨ ، وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة ٣ : ٢ (بنى سويف ٢٠١٧)

٣ إذا كان: أ ، ب ، حـ ، ى كميات متناسبة، فأثبت أن: $\frac{أ^{٢} + حـ^{٢}}{ب^{٢} + ى^{٢}} = \frac{أ حـ}{ب ى}$ (الغربية ٢٠١٨)

٤ إذا كانت: $\frac{٢١س + أ}{٧س + ب} = \frac{أ}{ب}$ ، س ≠ ٠ ، فأوجد: قيمة $\frac{أ + ٢ب}{٢أ}$ (الإسماعيلية ٢٠١٣)



**فكر وناقش**

**نعلـم أن :** $\frac{٢}{٣} = \frac{٦}{٩} = \frac{١٠}{١٥}$

**فـإذا:**
- جمعنا مقدمات وجمعنا توالى النسبتين الأولى والثانية نحصل على النسبة: $\frac{٢ + ٦}{٣ + ٩} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$
- جمعنا مقدمات وجمعنا توالى النسبتين الثانية والثالثة نحصل على النسبة: $\frac{٦ + ١٠}{٩ + ١٥} = \frac{١٦}{٢٤} = \frac{٢}{٣}$
- جمعنا مقدمات وجمعنا توالى النسب الثلاث نحصل على النسبة: $\frac{٢ + ٦ + ١٠}{٣ + ٩ + ١٥} = \frac{١٨}{٢٧} = \frac{٢}{٣}$

• **ماذا تلاحـظ من النسـب السابقـة؟**

**خاصيـة (٤)** إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و} = \dots\dots = م$ (حيث $م \in ح^*$)

**فـإن:** أ = ب م ، ح = ء م ، هـ = و م ، ..........

$\therefore \frac{أ + ح + هـ + \dots}{ب + ء + و + \dots} = \frac{ب م + ء م + و م + \dots}{ب + ء + و + \dots} = \frac{م(ب + ء + و + \dots)}{ب + ء + و + \dots} = م$ (إحدى النسب)

**أى أن:** $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب

---

$\because$ النسبـة لا تتغير قيمتها إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى صفرًا.

$\therefore \frac{أ م_١}{ب م_١} = \frac{ح م_٢}{ء م_٢} = \frac{هـ م_٣}{و م_٣} = \dots\dots = م$ (حيث $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، ........ أعداد حقيقية خلاف الصفر)

$\therefore \frac{أ م_١ + ح م_٢ + هـ م_٣ + \dots}{ب م_١ + ء م_٢ + و م_٣ + \dots} = م$ (إحدى النسب)

## مثال ١

إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{٨}} = \frac{\text{ب}}{\text{٤}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٥}} = \frac{\text{٥أ − ب + ٤جـ}}{\text{٨س}}$ فأوجد: قيمة س

**الحـل**

- بضرب حدى النسبة الأولى × (٥)، وبضرب حدى النسبة الثانية × (−١)، وبضرب حدى النسبة الثالثة × (٤)، ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

∴ $\frac{\text{٥أ − ب + ٤جـ}}{\text{٥(٨) + (−١)(٤) + ٤(٥)}}$ = (إحدى النسب)

∴ $\frac{\text{٥أ − ب + ٤جـ}}{\text{٥٦}} = \frac{\text{٥أ − ب + ٤جـ}}{\text{٨س}}$

∴ ٨ س = ٥٦

∴ س = ٧

**خاصية (٥)** إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن: $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ أى أن: $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}$

## مثال ٢

إذا كان: $\frac{\text{أ + ٣ب}}{\text{س + ٥ص}} = \frac{\text{٣ب + ٥جـ}}{\text{٥ص + ٧ع}} = \frac{\text{٥جـ + أ}}{\text{٧ع + س}}$ فأثبت أن: $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

**الحـل**

- بضرب حدى النسبة الثانية × (−١) ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\frac{\text{أ + ٣ب − ٣ب − ٥جـ + ٥جـ + أ}}{\text{س + ٥ص − ٥ص − ٧ع + ٧ع + س}} = \frac{\text{٢أ}}{\text{٢س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ = إحدى النسب ——— (١)

- بضرب حدى النسبة الثالثة × (−١) ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\frac{\text{أ + ٣ب + ٣ب + ٥جـ − ٥جـ − أ}}{\text{س + ٥ص + ٥ص + ٧ع − ٧ع − س}} = \frac{\text{٦ب}}{\text{١٠ص}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ = إحدى النسب ——— (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ أى أن: $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

### سؤال ١

1. إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{٨}} = \frac{\text{ب}}{\text{٤}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٥}} = \frac{\text{٥أ − ب + ٤جـ}}{\text{٤س}}$ فأوجد قيمة س
2. إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{س + ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{٢س − ص}}$ فأثبت أن: $\frac{\text{٢أ + ب}}{\text{٤س + ص}} = \frac{\text{٣أ − ب}}{\text{س + ٤ص}}$

## مثال ٣

إذا كان: $\frac{أ}{س - ص + ع} = \frac{ب}{ص - ع + س} = \frac{حـ}{ع - س + ص}$ فأثبت أن: $\frac{أ + ب}{س} = \frac{ب + حـ}{ص}$

**الحل**

**أولًا:** بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين الأولى والثانية:

$\therefore \frac{أ + ب}{س - ص + ع + ص - ع + س} = \frac{أ + ب}{٢ س} =$ إحدى النسب ـــــــــ (١)

**ثانيًا:** بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين الثانية والثالثة:

$\therefore \frac{ب + حـ}{ص - ع + س + ع - س + ص} = \frac{ب + حـ}{٢ ص} =$ إحدى النسب ـــــــــ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore \frac{أ + ب}{٢ س} = \frac{ب + حـ}{٢ ص} \Leftarrow \frac{أ + ب}{س} = \frac{ب + حـ}{ص}$

## مثال ٤

إذا كان: $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٦}$ فأثبت أن: $\frac{س + ص + ع}{٢ س + ٣ ص + ٣ ع} = \frac{٧}{١٩}$

**الحل**

**أولًا:** بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\therefore \frac{س + ص + ص + ع + ع + س}{٣ + ٥ + ٦} =$ إحدى النسب

$\therefore \frac{٢ س + ٢ ص + ٢ ع}{١٤} = \frac{٢ (س + ص + ع)}{١٤} = \frac{س + ص + ع}{٧} =$ إحدى النسب ـــــــــ (١)

**ثانيًا:** بضرب حدى النسبة الثانية × (٢) ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\therefore \frac{س + ص + ٢ ص + ٢ ع + ع + س}{٣ + ١٠ + ٦} =$ إحدى النسب

$\therefore \frac{٢ س + ٣ ص + ٣ ع}{١٩} =$ إحدى النسب ـــــــــ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore \frac{س + ص + ع}{٧} = \frac{٢ س + ٣ ص + ٣ ع}{١٩} \Leftarrow \frac{س + ص + ع}{٢ س + ٣ ص + ٣ ع} = \frac{٧}{١٩}$

## مثال ٥

إذا كان: $\frac{\text{س}}{\text{أ}-٢\text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}-٢\text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{جـ}-٢\text{أ}}$ فأثبت أن: $\frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{أ}-٥\text{جـ}} = \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٤\text{أ}}$

**الحـل**

**أولًا:** بضرب حدى النسبة الثانية × (٢) وبضرب حدى النسبة الثالثة × (−١) وجمع مقدمات وجمع توالى النسب الثلاث:

$$\therefore \frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{\text{أ}-٢\text{ب}+٢\text{ب}-٤\text{جـ}-\text{جـ}+٢\text{أ}} = \frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{أ}-٥\text{جـ}} = \text{إحدى النسب} \quad \text{——— (١)}$$

**ثانيًا:** بضرب حدى النسبة الثالثة × (٢) وجمع مقدمات وجمع توالى النسبتين الثانية والثالثة:

$$\therefore \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٢\text{جـ}+٢\text{جـ}-٤\text{أ}} = \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٤\text{أ}} = \text{إحدى النسب} \quad \text{——— (٢)}$$

من (١)، (٢) $\therefore \frac{\text{س}+٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{أ}-٥\text{جـ}} = \frac{\text{ص}+٢\text{ع}}{\text{ب}-٤\text{أ}}$

## مثال ٦

إذا كان: $\frac{\text{س}+\text{ص}}{٧} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{٥} = \frac{\text{ع}+\text{س}}{٨}$ فأثبت أن: $\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ع}} = ٥$

**الحـل**

**أولًا:** بجمع مقدمات وجمع توالى النسب الثلاث:

$$\therefore \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ص}+\text{ع}+\text{ع}+\text{س}}{٧+٥+٨} = \frac{٢\text{س}+٢\text{ص}+٢\text{ع}}{٢٠}$$

$$= \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{١٠} = \text{إحدى النسب} \quad \text{——— (١)}$$

**ثانيًا:** بضرب حدى النسبة الثانية × (−١) وبجمع مقدمات وجمع توالى النسبتين الأولى والثانية:

$$\therefore \frac{\text{س}+\text{ص}-\text{ص}-\text{ع}}{٧-٥} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{٢} = \text{إحدى النسب} \quad \text{——— (٢)}$$

من (١)، (٢) $\therefore \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{١٠} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{٢}$ $\therefore \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ع}} = \frac{١٠}{٢} = ٥$ **(وهو المطلوب)**

### س؟ سؤال ٢

١ إذا كان: $\frac{\text{س}+٤\text{ص}}{\text{أ}+٢\text{ب}} = \frac{٤\text{ص}+٧\text{ع}}{٢\text{ب}+٥\text{جـ}} = \frac{٧\text{ع}+\text{س}}{٥\text{جـ}+\text{أ}}$ فأثبت أن: $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = ٢\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$

٢ إذا كان: $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٣} = \frac{\text{ب}+\text{جـ}}{٦} = \frac{\text{جـ}+\text{أ}}{٥}$ فأثبت أن: $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = ٧$

## مثال ٧

إذا كان: $\frac{ح + ء}{٢٠} = \frac{ح + ء - هـ}{٥} = \frac{ح - ء + هـ}{١١}$ فأثبت أن: $\frac{ح}{٨} = \frac{ء}{١٢} = \frac{هـ}{١٥}$

### الحل

- بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين الثانية والثالثة:

$\therefore \frac{ح + ء - هـ + ح - ء + هـ}{٥ + ١١} = \frac{٢ح}{١٦} = \frac{ح}{٨}$ = إحدى النسب ——— (١)

- بضرب حدى النسبة الثانية × $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ وبضرب حدى النسبة الثالثة × $\left(\frac{-١}{٢}\right)$

ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\therefore \frac{ح + ء - \frac{١}{٢}ح - \frac{١}{٢}ء + \frac{١}{٢}هـ - \frac{١}{٢}ح + \frac{١}{٢}ء - \frac{١}{٢}هـ}{٢٠ - \frac{٥}{٢} - \frac{١١}{٢}} = \frac{ء}{١٢}$ = إحدى النسب ——— (٢)

- بضرب حدى النسبة الثانية × (−١) ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين الأولى والثانية:

$\therefore \frac{ح + ء - ح - ء + هـ}{٢٠ - ٥} = \frac{هـ}{١٥}$ = إحدى النسب ——— (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتـج أن: $\frac{ح}{٨} = \frac{ء}{١٢} = \frac{هـ}{١٥}$

---

- ملحوظـة: توجد طرق أخرى للحل.

### س؟ سؤال ٣

(١) إذا كان: $\frac{أ + ب}{٨} = \frac{ب + ح}{٧} = \frac{ح + أ}{٥}$ فأثبت أن: $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥} = \frac{ح}{٢}$

(٢) إذا كان: $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٣} = \frac{ع + س}{٦}$ فأثبت أن: $\frac{س - ع}{س + ص + ع} = \frac{٢}{٧}$



## تدريبات الأضــواء

### خواص التناسب (٤)، (٥):

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ إذا كانت: ٢ ، ٣ ، ب ، ٥ كميات متناسبة، فإن: $\frac{٢}{ب}$ = ................ (القاهرة ٢٠١٨)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٨

٢ إذا كان: $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س + ٢ص}{ك}$ ، فإن: ك = ................ (الغربية ٢٠١٧)

(أ) ٩ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ٨

٣ إذا كان: $\frac{٢}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = \frac{٣}{٥}$ فإن: $\frac{٢ + حـ + هـ}{ب + ء + و}$ = ................ (بنى سويف ٢٠٢١)

(أ) $\frac{٩}{٥}$ (ب) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٤ إذا كانت: ٢ ، ٣س ، ب ، ٥س كميات متناسبة، فإن: $\frac{٢}{ب}$ = ................ (الإسماعيلية ٢٠١٧)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٨}{٣}$ (د) ١٥

٥ إذا كان: $\frac{٢}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ = م ، م ≠ صفر ، فإن: $\frac{٢ \times حـ}{ب \times ء}$ = ................ (السويس ٢٠٢٠)

(أ) ٢م$^٢$ (ب) م$^٢$ (جـ) م (د) ٢م

٦ إذا كان: $\frac{٢}{٤} = \frac{ب}{٥}$ ، فإن: $\frac{ب - ٢}{ب + ٢}$ = ................

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

٧ إذا كان: $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥} = \frac{٢س + ص + ع}{٥ك}$ ، فإن: ك = ................

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ١٢

٨ إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = \frac{٤}{٥}$ ، فإن: $\frac{س + ع}{ص + ل}$ = ................

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٨}{٥}$

٩ إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = \frac{م}{ن}$ ، فإن: $\frac{٣س + ٢ع + م}{٣ص + ٢ل + ن} = \frac{٧م}{.....}$

(أ) ٧ص (ب) ٧ل (جـ) ٧ن (د) ٧ص + ٧ل + ٧ن

١٠ إذا كان: $\frac{س}{٧}$ = ص = $\frac{ع}{٩}$ ، فإن: $\frac{س + ص + ع}{ع - ص - س}$ = ..................

(أ) $\frac{١}{١٧}$ (ب) ١٧ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) ١٦

١١ إذا كان: $\frac{س}{٦}$ = $\frac{ص}{٥}$ = $\frac{ع}{٤}$ = $\frac{أ}{١١}$ ، فإن: أ = ..................

(أ) س + ص + ع (ب) ٢س + ص (جـ) س + ص (د) ص + ع

١٢ إذا كان: $\frac{أ}{٥}$ = $\frac{ب}{٧}$ ، فإن: $\frac{أ+ب}{٦٠}$ = $\frac{أ}{......}$

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

١٣ إذا كان: $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$ = $\frac{١٥}{٨}$ فإن: $\frac{٢ب + ٥د}{٢أ + ٥جـ}$ = ..................

(أ) $\frac{١٥}{٨}$ (ب) $\frac{٨}{١٥}$ (جـ) $\frac{١٣}{٨}$ (د) $\frac{١٥}{١٣}$

١٤ إذا كان: $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{جـ}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، فإن: ب : جـ = .................. (الغربية ٢٠١٧)

(أ) ٣ : ٤ (ب) ٥ : ٦ (جـ) ٦ : ٥ (د) ٤ : ٣

١٥ إذا كان: $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$ وكان: $\frac{س + ٣جـ}{٥ب + ٣د}$ = $\frac{أ}{ب}$ ، فإن: س = .................. (القاهرة ٢٠١٨)

(أ) ٣أ (ب) أ (جـ) ٥ب (د) ٥أ

١٦ إذا كان: $\frac{٣}{٤}$ أ = $\frac{٣}{٢}$ ب = ٣ جـ ، فإن: أ : ب : جـ = ..................

(أ) ١ : ٢ : ٤ (ب) ٤ : ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ : ٢ (د) ٢ : ٤ : ١

---

٢ إذا كان: $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{ب}{٣}$ = $\frac{جـ}{٤}$ = $\frac{٣أ + ٢ب + ٥جـ}{٤س}$ فأوجد: قيمة س

---

٣ إذا كان: $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{ب}{٣}$ = $\frac{٢أ - ب}{م}$ فأوجد: قيمة م

---

٤ إذا كان: $\frac{س}{٤}$ = $\frac{ص}{٥}$ = $\frac{ع}{٧}$ = $\frac{س - ٢ص + ٤ع}{ك + ٢٠}$ فأوجد: قيمة ك (القاهرة ٢٠٢٢)

---

٥ إذا كان: $\frac{س}{أ}$ = $\frac{ص}{ب}$ = $\frac{ع}{جـ}$ فأثبت أن: $\frac{س + ص + ع}{أ + ب + جـ}$ = $\frac{أس + ب ص}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

---

٦ إذا كان: $\frac{أ}{٤}$ = $\frac{ب}{٥}$ = $\frac{جـ}{٣}$ ، فأثبت أن: $\frac{أ - ب + جـ}{أ + ب - جـ}$ = $\frac{١}{٣}$ (الدقهلية ٢٠١٨)

٧ إذا كان: $س = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٥}$ ، فأثبت أن: $\frac{س + ص - ٢ع}{س - ٣ع} = \frac{٣}{٧}$

٨ إذا كان: $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٧} = \frac{ع}{٥}$ ، فأوجد قيمة: $\frac{٥س - ٣ع}{٢س - ٣ص + ٤ع}$

٩ إذا كان: $\frac{م}{٢ك + ل} = \frac{ن}{٢ل - ك}$ فأثبت أن: $\frac{٣م + ٢ن}{٤ك + ٧ل} = \frac{٢م - ٣ن}{٧ك - ٤ل}$

١٠ إذا كان: $\frac{س}{أ - ب + ح} = \frac{ص}{ب - ح + أ} = \frac{ع}{ح - أ + ب}$ ، فأثبت أن: $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$ (بورسعيد ٢٠١٩)

١١ إذا كان: $\frac{أ}{س + ص} = \frac{ب}{ص - ٢س} = \frac{ح}{س + ٤ص}$ فأوجد: قيمة $\frac{ح + ٢ب}{٢أ + ب}$ (الجيزة ٢٠١٦)

١٢ إذا كان: $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{ح}{٧}$ ، فأثبت أن: $\frac{٥ب - ٣ح}{٢ح - ٣أ} = \frac{١}{٢}$ (القاهرة ٢٠١٨)

١٣ إذا كان: $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٦}$ فبرهن أن: $\frac{٢س + ص - ع}{٧} = \frac{ص + ع}{٩}$

١٤ إذا كان: $\frac{أ + ب}{٤} = \frac{ب + ح}{٥} = \frac{ح + أ}{٧}$ ، فأثبت أن: $\frac{أ + ب + ح}{٨} = \frac{أ}{٣}$ (كفر الشيخ ٢٠١٥)

١٥ إذا كان: $٢أ = ٣ب = ٣ح$ ، فأوجد: القيمة العددية للمقدار $\frac{٦أ + ب + ح}{٤أ + ٦ب + ٦ح}$ (الجيزة ٢٠١٩)

١٦ إذا كان: $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٨} = \frac{ع + س}{٧}$ ، فأثبت أن: $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٥}$ (الوادى الجديد ٢٠١٧)

١٧ إذا كان: $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٣} = \frac{ع + س}{٦}$ ، فأثبت أن: $\frac{س + ص + ع}{٧} = \frac{س - ع}{٢}$

١٨ إذا كان: $\frac{أ + ب}{٧} = \frac{ب + ح}{٥} = \frac{ح + أ}{٦}$ ، فأوجد: أ : ب : ح

١٩ إذا كان: $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٨} = \frac{ع + س}{٦}$ ، فأثبت أن: $\frac{س + ص + ع}{٢س + ٣ص + ٣ع} = \frac{١٧}{٥٠}$ (كفر الشيخ ٢٠٢٠)

٢٠ إذا كان: $\frac{أ - ٣ح}{٢ب - ٤د} = \frac{أ - ٥د}{٢ب - ٦هـ} = \frac{٣ح}{٤د}$ ، فأثبت أن: $\frac{أ}{٥د} = \frac{ب}{٣هـ}$

٢١ إذا كان: $\frac{أ + ٢ب}{٥} = \frac{٣ب - ح}{٣} = \frac{ح - أ}{٢}$ ، فأثبت أن: أ : ب : ح = ١ : ٢ : ٣

٢٢ إذا كان: $\frac{ع - ص}{ع - س} = \frac{س + ٣ع}{٢ص - ٣س} = \frac{٢س - ٣ص}{٣ع + ص}$ ، فبرهن أن كل نسبة تساوى: $\frac{س}{ص}$

## تفكير إبداعى TIMSS

**٢٣** إذا كان: $\frac{\text{٦س} + \text{٢ص}}{\text{٥أ} + \text{٣ب}} = \frac{\text{٢ص} + \text{٥ع}}{\text{٣ب} - \text{٥ح}} = \frac{\text{٥ع} + \text{٤س}}{\text{٤ح} - \text{٥أ}}$ ، **فأثبت أن:** ٩ ح (س - ٥ ع) = ٥ س (١٠ أ + ح)

**٢٤** إذا كان: $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢٥}} = \frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{١١}} = \frac{\text{س} + \text{ص} - \text{ع}}{\text{٨}}$ ، **فبرهن أن:** س : ص : ع = ١٨ : ٧ : ١٧

**٢٥** إذا كان: $\frac{\text{أ} + \text{٣ب}}{\text{٧}} = \frac{\text{٣ب} - \text{ح}}{\text{٣}} = \frac{\text{ح} - \text{أ}}{\text{٢}}$ ، **فأثبت أن:** أ + ب - ح = ٠

**٢٦** إذا كان: $\frac{\text{س}}{\text{أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{ع}}{\text{أ} - \text{ب}}$ ، حيث أ $\neq$ ب **فأثبت أن:** (أ - ب) س + ب ص - أ ع = صفر

**٢٧** إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{س} - \text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{س} + \text{ص} - \text{ع}} = \frac{\text{ح}}{\text{ص} + \text{ع} - \text{س}}$ ، **فأثبت أن** كل نسبة تساوى $\frac{\text{أس} + \text{ب ص} + \text{ح ع}}{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

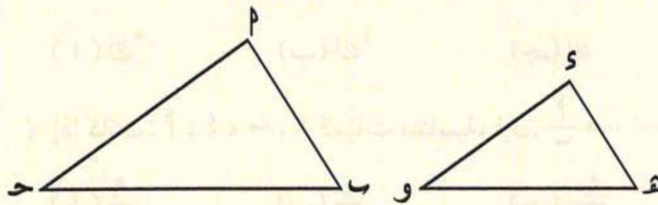
**٢٨** فى الشكل المقابل :

إذا كان $\triangle$ ءهـ و ~ $\triangle$ أ ب ح

بحيث ءهـ : أ ب = ٣ : ٥

وكان محيط $\triangle$ ءهـ و = ١٨ سم

**فأوجد محيط** $\triangle$ أ ب ح




## تدريبات الكتاب المدرسى

**١** إذا كان: $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ **فأثبت أن:**

(أ) $\frac{\text{٢ص} - \text{ع}}{\text{٣س} - \text{٢ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$ (شمال سيناء ٢٠١٨)

(ب) $\sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = \text{٢س} + \text{ص}$ (سوهاج ٢٠٢١)

**٢** إذا كانت: $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}}$ ، **فأثبت أن** كلًا من هذه النسب يساوى ٢

(ما لم تكن: س + ص = ٠) ثم أوجد: س : ص : ع (البحيرة ٢٠١٨)

**٣** إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{ح}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ} - \text{ب} + \text{٥ح}}{\text{٣س}}$ ، **فأوجد:** قيمة س (قنا ٢٠١٧)

**٤** إذا كان: $\frac{\text{س}}{\text{٢أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب} - \text{ح}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢ح} - \text{أ}}$ **فأثبت أن:** $\frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{ح}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$ (القليوبية ٢٠١٨)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: $\frac{أ}{١٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{أ - ٢ب}{ك}$ ، فإن: ك = .................. (كفر الشيخ ٢٠١٣)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢ إذا كان: $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٥}$ ، فإن: كل نسبة تساوى .................. (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) $\frac{أ+ب+جـ}{٣٠}$ (ب) $\frac{أ+٢ب-جـ}{٣}$ (جـ) $\frac{أ-ب+جـ}{١٠}$ (د) $\frac{أ-ب}{٥}$

٣ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ك$ (حيث ك ∈ ع*)، فإن: $\frac{أ جـ هـ}{ب ء و} =$ .................. (بنى سويف ٢٠١٩)

(أ) $ك^٣$ (ب) $ك^٢$ (جـ) ك (د) ٣

٤ إذا كانت: أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة، فإن: $\frac{أ}{ب} =$ .................. (الجيزة ٢٠١٧)

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) $\frac{-٩}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٩}$

٥ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{٥}{٨}$ ، فإن: $\frac{ب+ء}{أ+جـ} =$ .................. (الفيوم ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) $\frac{١٣}{٨}$ (د) $\frac{٥}{١٣}$

٦ إذا كان: ٢ ، ٣ ، ٦ ، ص-١ كميات متناسبة، فإن: ص = .................. (المنوفية ٢٠١٨)

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

---

## ٢ أجب عن الأسئلة التالية:

١ إذا كان: $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ ، فأثبت أن: $\frac{٥س - ٢ع}{٤س - ٣ص + ٢ع} = \frac{١}{٢}$ (المنيا ٢٠١٨)

٢ إذا كان: $\frac{أ+ب}{٨} = \frac{ب+جـ}{٤} = \frac{جـ+أ}{٦}$ فأثبت أن: $\frac{أ+ب+جـ}{أ-جـ} = \frac{٩}{٤}$ (أسيوط ٢٠١٨)

٣ إذا كان: $\frac{أ}{٤س+ص} = \frac{ب}{س-٤ص}$ فبرهن أن: $\frac{أ+ب}{٥س-٣ص} = \frac{أ-ب}{٣س+٥ص}$ (الدقهلية ٢٠١٩)




ذاكر الدرس ٣

# التناسب المتسلسل

## فكر وناقش

- إذا أخذنا الأعداد : ٢ ، ٤ ، ٨ ، والمقارنة بين النسب $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٤}{٨}$

نلاحظ أن : $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ أى أن : $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$

- هل توجد علاقة بين: $(٤)^٢$ وحاصل ضرب ٢ × ٨ ؟

## التناسب المتسلسل:

- يقال للكميات ٢ ، ب ، حـ إنها فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ}$ أو $ب^٢ = أ\,حـ$

ويسمى أ الأول المتناسب ، ب الوسط المتناسب ، حـ الثالث المتناسب

### نقاط هامة

- إذا كان: أ ، ب ، حـ فى تناسب متسلسل فإن: $ب^٢ = أ\,حـ$ أى أن: $ب = \pm\sqrt{أ\,حـ}$

(الكميتان أ ، حـ تكونان موجبتين معًا أو سالبتين معًا)

الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{\text{الأول المتناسب} \times \text{الثالث المتناسب}}$

فمثلًا: إذا كان: ٤ ، س ، ٩ فى تناسب متسلسل فإن: س (الوسط المتناسب) = $\pm\sqrt{٤ \times ٩} = \pm ٦$

- الأول المتناسب = $\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}}$
- الثالث المتناسب = $\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}}$

## مثال ١

فى كل مما يأتى أوجد قيمة س بحيث تكون الكميات فى تناسب متسلسل:

١ ٢ ، س ، ٨ ٢ ٥ ، ١٥ ، س ٣ س ، ٣ ، ٩

**الحل**

١ ∵ ٢ ، س ، ٨ فى تناسب متسلسل ∴ س الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{٢ \times ٨} = \pm ٤$

٢ ∵ ٥ ، ١٥ ، س فى تناسب متسلسل ∴ س الثالث المتناسب = $\frac{(١٥)^٢}{٥} = \frac{٢٢٥}{٥} = ٤٥$

٣ ∵ س ، ٣ ، ٩ فى تناسب متسلسل ∴ س الأول المتناسب = $\frac{(٣)^٢}{٩} = ١$

## سؤال ١

فى كل مما يأتى أوجد قيمة س بحيث تكون الكميات فى تناسب متسلسل:

١ س ، ٦ ، ١٨ ٢ ١٢ ، س ، ٢٧ ٣ ٧ ، ١٤ ، س

## مثال ٢

أوجد كلًّا مما يأتى:

١ الأول المتناسب للعددين ٢ ، ٨

٢ الوسط المتناسب للكميتين $س^٢$ ، $ص^٤$

٣ الثالث المتناسب للعددين $-٣\sqrt{٢}$ ، ١٢

### الحل

١ نفرض أن الأول المتناسب هو أ $\therefore$ أ $= \frac{(٢)^٢}{٨} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

٢ نفرض أن الوسط المتناسب هو ب $\therefore$ ب $= \pm \sqrt{س^٢ \times ص^٤} = \pm |س| ص^٢$

٣ نفرض أن الثالث المتناسب هو جـ $\therefore$ جـ $= \frac{(١٢)^٢}{-٣\sqrt{٢}} = \frac{١٤٤}{-٣\sqrt{٢}} = -٢٤\sqrt{٢}$

## مثال ٣

**أوجد العدد الذى إذا أُضيف لكل من الأعداد: ٢ ، ٦ ، ١٤ فإنها تصبح فى تناسب متسلسل.**

### الحل

نفرض أن العدد هو س

$\therefore \frac{س + ٢}{س + ٦} = \frac{س + ٦}{س + ١٤} \Leftarrow (س + ٦)^٢ = (س + ٢)(س + ١٤)$

$\therefore س^٢ + ١٢س + ٣٦ = س^٢ + ١٦س + ٢٨$

$\therefore ٣٦ - ٢٨ = ١٦س - ١٢س$ فإن: $٨ = ٤س$ $\therefore س = ٢$ $\therefore$ العدد هو ٢

## سؤال ٢

١ أوجد كلًّا مما يأتى:

(أ) الوسط المتناسب بين الكميتين $٩س^٢$ ، $ص^٢$

(ب) الأول المتناسب للعددين ٥ ، $١٠\sqrt{٥}$

٢ أوجد العدد الذى إذا طُرح من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ فإنها تكوِّن تناسبًا متسلسلًا.



## نقاط هامة

- إذا كانت: $ٵ$ ، $ب$ ، $ح$ كميات فى تناسب متسلسل فإن: $\frac{ٵ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$

وبالتالى: $ب = ح م$ ، $ٵ = ب م = (ح م) م = ح م^٢$

أى أنه إذا كان: $\frac{ٵ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ فإن: $ب = ح م$ ، $ٵ = ح م^٢$

## مثال ٤

إذا كانت الكميات: $ٵ$ ، $ب$ ، $ح$ فى تناسب متسلسل فأثبت أن: $\frac{ٵ + ب}{ب + ح} = \frac{ٵ^٢(ب - ح)}{ب^٢(ٵ - ب)}$

**الحل**

∵ $ٵ$ ، $ب$ ، $ح$ كميات متناسبة ∴ $\frac{ٵ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ ∴ $ب = ح م$ ، $ٵ = ح م^٢$

الطرف الأيمن $= \frac{ٵ + ب}{ب + ح} = \frac{ح م^٢ + ح م}{ح م + ح} = \frac{ح م (م + ١)}{ح (م + ١)} = م$ ——— (١)

الطرف الأيسر $= \frac{ٵ^٢(ب - ح)}{ب^٢(ٵ - ب)} = \frac{ح^٢م^٤(ح م - ح)}{ح^٢م^٢(ح م^٢ - ح م)} = \frac{ح^٢م^٤ \times ح(م - ١)}{ح^٢م^٢ \times ح م(م - ١)} = م$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: $\frac{ٵ + ب}{ب + ح} = \frac{ٵ^٢(ب - ح)}{ب^٢(ٵ - ب)}$ (وهو المطلوب)

## مثال ٥

إذا كانت $ب$ هى الوسط المتناسب بين $ٵ$ ، $ح$ فأثبت أن: $\frac{ٵ^٢ - ب^٢}{ب^٢ - ح^٢} = \frac{ٵ}{ح}$

**الحل**

∵ $ب$ وسط متناسب بين $ٵ$ ، $ح$ ∴ $ب^٢ = ٵ ح$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{ٵ^٢ - ب^٢}{ب^٢ - ح^٢} = \frac{ٵ^٢ - ٵ ح}{ٵ ح - ح^٢} = \frac{ٵ(ٵ - ح)}{ح(ٵ - ح)} = \frac{ٵ}{ح} =$ الطرف الأيسر

### سؤال ٣

❶ إذا كان: $\frac{ٵ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ فأثبت أن: $\frac{ٵ^٢ + ب^٢}{ٵ} = \frac{ب^٢ + ح^٢}{ح}$

❷ إذا كان: $\frac{٢ٵ - ب}{٢ب - ح} = \frac{ٵ}{ب}$ فأثبت أن: $ب$ وسط متناسب بين $ٵ$ ، $ح$

## نقاط هامة

• أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل $\Longleftarrow$ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

∴ حـ = ء م ، ب = حـ م = (ء م) م = ء $م^2$ ، أ = ب م = (ء $م^2$) م = ء $م^3$

أى أنه إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

فإن: حـ = ء م ، ب = ء $م^2$ ، أ = ء $م^3$

## مثال ٦

إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء}$ فأثبت أن: $\frac{أ - ٢ب}{ب - ٢حـ} = \frac{٣ب + ٤حـ}{٣حـ + ٤ء}$

**الحـل**

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

فـإن: حـ = ءم ، ب = ء$م^2$ ، أ = ء$م^3$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{أ - ٢ب}{ب - ٢حـ} = \frac{ء م^3 - ٢ ء م^2}{ء م^2 - ٢ ء م} = \frac{ء م^2 (م - ٢)}{ء م (م - ٢)} = م$ ———— (١)

الطرف الأيسر = $\frac{٣ب + ٤حـ}{٣حـ + ٤ء} = \frac{٣ ء م^2 + ٤ ء م}{٣ ء م + ٤ ء} = \frac{ء م (٣م + ٤)}{ء (٣م + ٤)} = م$ ———— (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

أى أن: $\frac{أ - ٢ب}{ب - ٢حـ} = \frac{٣ب + ٤حـ}{٣حـ + ٤ء}$ (وهو المطلوب)

### س؟ سؤال ٤

إذا كانت: أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل، فأثبت أن:

(١) $\frac{أ - ء}{أ + ب + حـ} = \frac{أ - ٢ب + حـ}{أ - ب}$

(٢) $\frac{أ ب - حـ ء}{ب^2 - حـ^2} = \frac{أ + حـ}{ب}$ (المنوفية ٢٠٢٠)

## مثال ٧

إذا كانت: ﭐ ، ب ، ﺟ ، ﺀ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{ﭐ + ﺀ}{ب - ﺟ + ﺀ} = \frac{ﭐ - ﺟ}{ب - ﺟ}$

**الحل**

نفرض أن: $\frac{ﭐ}{ب} = \frac{ب}{ﺟ} = \frac{ﺟ}{ﺀ} = م$

فإن: ﺟ = ﺀم ، ب = ﺀ$م^٢$ ، ﭐ = ﺀ$م^٣$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{ﭐ + ﺀ}{ب - ﺟ + ﺀ} = \frac{ﺀم^٣ + ﺀ}{ﺀم^٢ - ﺀم + ﺀ} = \frac{ﺀ(م^٣ + ١)}{ﺀ(م^٢ - م + ١)}$

$= \frac{(م + ١)(م^٢ - م + ١)}{(م^٢ - م + ١)} = م + ١$ ①

الطرف الأيسر = $\frac{ﭐ - ﺟ}{ب - ﺟ} = \frac{ﺀم^٣ - ﺀم}{ﺀم^٢ - ﺀم} = \frac{ﺀم(م^٢ - ١)}{ﺀم(م - ١)}$

$= \frac{(م - ١)(م + ١)}{(م - ١)} = م + ١$ ②

من ① ، ② ينتج أن: $\frac{ﭐ + ﺀ}{ب - ﺟ + ﺀ} = \frac{ﭐ - ﺟ}{ب - ﺟ}$ (وهو المطلوب)

### سؤال ٥

١ إذا كانت: $ب^٢$ = ﭐ ﺟ ، $ﺟ^٢$ = ب ﺀ فأثبت أن: $\frac{٢ﭐ + ٣ﺀ}{٣ﭐ - ٤ﺀ} = \frac{٢ﭐ^٣ + ٣ب^٣}{٣ﭐ^٣ - ٤ب^٣}$

٢ إذا كانت الكميات: س ، ص ، ع ، ل في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{ص}{ل} = \left(\frac{س + ص}{ص + ع}\right)^٢$

٣ إذا كانت: ﭐ ، ب ، ﺟ ، ﺀ كميات في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{ﺟ^٢ - ﺀ^٢}{ﭐ - ﺟ} = \frac{ب ﺀ}{ﭐ}$

## مثال ٨

إذا كانت: ٲ ، ب ، حـ ، ء في تناسب متسلسل فأثبت أن:

(ب + حـ) وسط متناسب بين (حـ + ء) ، (ٲ + ب)

لاحظ أن

لإثبات أن: (ب + حـ)

وسط متناسب بين (حـ + ء) ، (ٲ + ب)

نحتاج إلى إثبات أن:

$(ب + حـ)^٢ = (حـ + ء)(ٲ + ب)$

أو $\frac{(حـ + ء)}{(ب + حـ)} = \frac{(ب + حـ)}{(ٲ + ب)}$

### الحل

نفرض أن: $\frac{ٲ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

∴ حـ = ء م ، ب = ء $م^٢$ ، ٲ = ء $م^٣$

$(ب + حـ)^٢ = (ءم^٢ + ءم)^٢$

$= [ءم(م + ١)]^٢ = ء^٢م^٢(م + ١)^٢$ ——— (١)

$(حـ + ء)(ٲ + ب) = (ءم + ء)(ءم^٣ + ءم^٢)$

$= ء(م + ١) \times ءم^٢(م + ١)$

$= ء^٢م^٢(م + ١)^٢$ ——— (٢)

من (١) ، (٢)

ينتج أن: $(ب + حـ)^٢ = (حـ + ء)(ٲ + ب)$

∴ (ب + حـ) وسط متناسب بين (حـ + ء) ، (ٲ + ب) (وهو المطلوب)

## سؤال ٦

١ إذا كانت: الكميات ٲ ، ٢ب ، ٣حـ ، ٤ء في تناسب متسلسل

فأثبت أن: (٢ب − ٣حـ) وسط متناسب بين (ٲ − ٢ب) ، (٣حـ − ٤ء)

٢ إذا كان: س ، ص ، ع ، ل في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{س^٢ + ل^٢}{ع(س + ع)} = \frac{ص}{ل} + \frac{ل}{ص} - ١$



## تدريبات الأضـــواء

### التناسب المتسلسل:

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ الوسط المتناسب الموجب للكميتين ء ، حـ هو .................. (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) ء حـ (ب) $-\sqrt{ء حـ}$ (جـ) $\frac{ء}{حـ}$ (د) $\sqrt{ء حـ}$

٢ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين ء ، حـ فإن: .................. (الغربية ٢٠١٩)

(أ) $ء^٢ = ب \times حـ$ (ب) $ب^٢ = ء \times حـ$ (جـ) $حـ^٢ = ء \times ب$ (د) $ب = ء \times حـ$

٣ الثانى المتناسب بين ٢ ، ٨ هو .................. (الغربية ٢٠١٩)

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) $\pm$ ٤ (د) $\pm$ ٦

٤ الأول المتناسب للعددين ٤ ، ٨ هو ..................

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٥ الثالث المتناسب للعددين ٣ ، ٦ هو .................. (الجيزة ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ١٢

٦ الوسط المتناسب بين ٤ ، ٩ هو ..................

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\pm$ ٦ (د) ٣٦

٧ الوسط المتناسب بين $٤ء^٣ب$ ، $١٦ء ب^٣$ هو ..................

(أ) $-٨ء^٢ب^٢$ (ب) $\pm ٨ء ب$ (جـ) $٨ء^٢ب^٢$ (د) $\pm ٨ء^٢ب^٢$

٨ إذا كان: ٤ ، ٦ ، ص كميات متناسبة، فإن: ص = ..................

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ٢٤

٩ إذا كانت الكميات: ٣ ، س ، $\frac{١}{ص}$ متناسبة، فإن: .................. = ٣ (الدقهلية ٢٠٢١)

(أ) $س^٢ص$ (ب) ص (جـ) س ص (د) $\frac{س^٢}{ص}$

١٠ إذا كانت الكميات ٤ ، س ، س ص متناسبة، فإن: $\frac{س}{ص}$ = ..................

(أ) ١٦ (ب) ١٤ (جـ) ٤ (د) ±٢

١١ إذا كانت الكميات: ٢ ، ٦ ، س + ١٥ متناسبة، فإن: س = ..................

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٢ إذا كانت الكميات: أ ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل فإن: أ + ب = .................. (الدقهلية ٢٠٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٩

١٣ إذا كانت الكميات: أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل، فإن: $أ^٢ : ب^٢$ = ..................

(أ) أ : جـ (ب) أ : ب (جـ) جـ : أ (د) ب : أ

١٤ إذا كان ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ حيث ٢ أ = ٣ جـ = ٦ فإن: $أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢$ = ..................

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ١٩

١٥ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{٥}$ = ٣ ، فإن: ب = .................. (الأقصر ٢٠٢٢)

(أ) ١٥ (ب) ٤٥ (جـ) ٣٥ (د) ١٣٥

١٦ إذا كان: س ، ص ، ع كميات متناسبة، فإن: $\frac{س}{ع}$ = ..................

(أ) $\frac{ع^٢}{ص^٢}$ (ب) $\frac{ص^٢}{ع^٢}$ (جـ) $\frac{ص^٢}{س^٢}$ (د) $(ص ع)^٢$

١٧ العدد الذي يضاف إلى كل من الأعداد الآتية ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٥ بالترتيب لكي تكون في تناسب متسلسل هو ..................

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٨ الوسط المتناسب بين (س − ٢) ، (س + ٢) هو ..................

(أ) $\sqrt{س + ٢}$ (ب) $س^٢ - ٤$ (جـ) $\pm\sqrt{س^٢ - ٤}$ (د) $\sqrt{س^٢ + ٤}$

٢ إذا كان: أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل، **فأثبت أن:** $\text{أ} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}}}{\text{جـ}}$

٣ إذا كان: ص وسطًا متناسبًا بين س ، ع ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{ص} + \text{ع}}$ (كفر الشيخ ٢٠١٩)

٤ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}}$ (مطروح ٢٠٢٢)

٥ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{أ} - \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ (أسيوط ٢٠٢٢)

٦ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{٢أ} + \text{٣ب}}{\text{٣جـ} + \text{٢ب}} = \frac{\text{أ} + \text{٥ب}}{\text{ب} + \text{٥جـ}}$ (الفيوم ٢٠٢٢)

٧ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}}$

٨ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$ (جنوب سيناء ٢٠٢٢)

٩ إذا كان: ص وسطًا متناسبًا بين س ، ع ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{س ع}}{\text{ص}\,(\text{ص} + \text{ع})} = \frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ص}}$ (المنيا ٢٠٢٢)

١٠ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، **فأثبت أن:** $\frac{\text{أ}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} + \frac{\text{ب}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢أ}}{\text{جـ}}$ (السويس ٢٠٢٢)

١١ إذا كانت: أ ، ٣ ، ٩ ، ب فى تناسب متسلسل، **فأوجد:** قيمة كل من أ ، ب (الأقصر ٢٠١٦)

١٢ إذا كانت: س ، ٢ ، ٤ ، ٢ص فى تناسب متسلسل، **فأوجد:** قيمة س + ص (الدقهلية ٢٠١٧)

١٣ **أوجد** العدد الذى إذا أُضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٥ ، ١٧ فإنها تكون تناسبًا متسلسلًا. (سوهاج ٢٠١٧)

١٤ إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{٢أ} - \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{٢ب} - \text{جـ}}$ **فأثبت أن:** ب وسط متناسب بين أ ، جـ (الشرقية ٢٠٢٢)

١٥ إذا كان: $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}}$ **فأثبت أن:** ب وسط متناسب بين أ ، جـ (بنى سويف ٢٠١٧)

١٦ إذا كان: $\frac{\text{٢س} + \text{٣ص}}{\text{٢ص} + \text{٣ع}} = \frac{\text{س} + \text{٢ص}}{\text{ص} + \text{٢ع}}$ **فأثبت أن:** ص هو الوسط المتناسب بين س ، ع

١٧ إذا كانت: ٧ ، س ، $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$ فى تناسب متسلسل، **فأوجد:** قيمة $\text{س}^{\text{٤}}\,\text{ص}^{\text{٢}}$ (بورسعيد ٢٠١٩)

18 إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل، فبرهن أن: $\frac{جـ^2 + أ}{ب} = \frac{د^2 + جـ}{د}$ (الدقهلية ٢٠١٦)

19 إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل، فأثبت أن: $\left(\frac{أ + ب}{ب + جـ}\right)^3 = \frac{أ}{د}$ (الشرقية ٢٠١٥)

20 إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل، فأثبت أن: $\frac{ب^2 - جـ^2}{ب} = ب - د$

21 إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل، فأثبت أن:

(أ) $\frac{2أ^2 + ب^2}{2جـ^2 + د^2} = \left(\frac{أ + ب}{جـ + د}\right)^2$

(ب) $\frac{ب^2 + جـ^2 + د^2}{أ^2 + ب^2 + جـ^2} = \frac{جـ + د}{أ + ب}$

(جـ) $\frac{أ^2 - 3جـ^2}{ب^2 - 3د^2} = \frac{ب}{د}$

(د) $\frac{2أ + 3د}{3أ - 4د} = \frac{2أ^3 + 3ب^3}{3أ^3 - 4ب^3}$

تفكير إبداعى TIMSS

22 إذا كانت الكميات الموجبة ٣ك ، ٢ل ، م ، ٦ ن فى تناسب متسلسل،

فأثبت أن: $\frac{ل^3 + ك^2}{27ن + 4} = \left(\frac{2ل^2}{3م}\right)^2$

23 إذا كان: ٩ ، ٣ ، ظا (٣ س)° فى تناسب متسلسل فإن س = ......... حيث س قياس زاوية حادة.

(أسوان ٢٠٢٤)

24 إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، فأثبت أن: $\frac{أ^3 + ب^3 + جـ^3}{أ^{-3} + ب^{-3} + جـ^{-3}} = ب^6$

25 إذا كان: الوسط المتناسب بين $\left(س + \frac{1}{س}\right)$ ، $\left(س + \frac{2}{س}\right)$ هو ± ٢ ، س ≠ ٠ ،

فأوجد قيمة المقدار: $س^2 + \frac{2}{س^2}$

## تدريبات الكتاب المدرسى

**١** إذا كانت ب هى الوسط المتناسب بين أ ، ح ، **فأثبت أن:**

(أ) $\frac{أ + ب + ح}{أ^{-1} + ب^{-1} + ح^{-1}} = ب^{٢}$ (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

(ب) $\frac{٢ح^{٢} - ٣ب^{٢}}{٢ب^{٢} - ٣أ^{٢}} = \frac{ح}{أ} = \frac{ح^{٢}}{ب^{٢}}$ (الشرقية ٢٠١٨)

---

**٢** إذا كانت: أ ، ب ، ح ، د فى تناسب متسلسل، **فأثبت أن:**

(أ) $\frac{أب - حد}{ب^{٢} - ح^{٢}} = \frac{أ + ح}{ب}$ (السويس ٢٠١٣)

(ب) $\frac{أ^{٢} - ٣ح^{٢}}{ب^{٢} - ٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$ (البحيرة ٢٠١٥)

(جـ) $\frac{أ}{ب + د} = \frac{ح^{٣}}{ح^{٢}د + د^{٣}}$ (كفر الشيخ ٢٠٢٠)

(د) $\frac{ح^{٢} - د^{٢}}{أ - ح} = \frac{ب د}{أ}$ (الدقهلية ٢٠٢٢)

---

**٣** إذا كانت: ٥أ ، ٦ب ، ٧ح ، ٨د كميات موجبة فى تناسب متسلسل،

**فأثبت أن:** $\sqrt[٣]{\frac{٥أ}{٨د}} = \sqrt{\frac{٥أ + ٦ب}{٧ح + ٨د}}$

---

**٤** **الربط بالهندسة:**

إذا كانت: س ، ص ، ع أطوال أضلاع مثلث متناسبة، وكان س + ص = ١٥ سم،

ص + ع = ٢٢,٥ سم، **فأوجد:** س : ص

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ $\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} = \frac{٧}{......}$ (البحيرة ٢٠٢١)

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ١١ (د) ٤

٢ الوسط المتناسب بين العددين ٣ ، ٢٧ يساوى .................. (أسوان ٢٠٢٢)

(أ) ١٩ (ب) ±٩ (جـ) ٣ (د) ٢٧

٣ إذا كانت: ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل، فإن: $س^٢ ص$ = .................. (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(أ) ٧ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) ١٤ (د) ٤٩

٤ الثالث المتناسب للعددين -٦ ، ١٢ هو .................. (الأقصر ٢٠١٩)

(أ) -٢٤ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٧٢

٥ إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ء} = ٢$ ، فإن: $\frac{أ}{ء}$ = .................. (الشرقية ٢٠١٣)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٦ الوسط المتناسب بين $٣س^٣$ ، ٢٧س يساوى .................. (أسيوط ٢٠١٨)

(أ) $٩س^٢$ (ب) $±٩س^٤$ (جـ) $±٩س^٢$ (د) $٩س^٤$

---

## ٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كان: ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ ، فأثبت أن: $\sqrt{\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢}} = \frac{أ}{ب}$ (المنيا ٢٠١٨)

٢ إذا كانت: ١ ، س ، ٩ ، ص فى تناسب متسلسل حيث س ، ص عددان موجبان، فأوجد كلًا من س ، ص (الجيزة ٢٠١٣)

٣ إذا كانت: ٤ ، أ ، $\frac{١}{٩ب^٢}$ فى تناسب متسلسل، فأوجد قيم: أ ب (الشرقية ٢٠٢٣)

٤ إذا كان: $\frac{٣أ - ب}{٣ب - جـ} = \frac{أ}{ب}$ ، فأثبت أن: ب وسط متناسب بين أ ، جـ (الإسماعيلية ٢٠١٦)

٥ إذا كان: أ ، ب ، جـ ، ء فى تناسب متسلسل، فأثبت أن: $\frac{ب + ء}{جـ^٢ ء^٢ + ء^٣} = \frac{أ}{جـ^٣}$ (الشرقية ٢٠١٩)




ذاكر الدرس ٣

# التغير الطردى والتغير العكسى

## فكر وناقش

• الجـداول الآتيـة تمثل ثلاث علاقات بين الكميتين س ، ص

احسب فى كل علاقة قيمة: $\frac{س}{ص}$ ، س × ص ثم لاحظ أى منها ثابتة وأى منها غير ثابتة.

جدول (ا)

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ١ | ٢ | ٣ |
| ص | ٣ | ٦ | ٩ |
| $\frac{س}{ص}$ | $\frac{١}{٣}$ | $\frac{١}{٣}$ | $\frac{١}{٣}$ |
| س × ص | ٣ | ١٢ | ٢٧ |

جدول (ب)

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ٣ | ٥ | ٤ |
| ص | ٢٠ | ١٢ | ١٥ |
| $\frac{س}{ص}$ | $\frac{٣}{٢٠}$ | $\frac{٥}{١٢}$ | $\frac{٤}{١٥}$ |
| س × ص | ٦٠ | ٦٠ | ٦٠ |

جدول (جـ)

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ٣ | ٤ | ٧ |
| ص | ٤ | ٥ | ١٠ |
| $\frac{س}{ص}$ | $\frac{٣}{٤}$ | $\frac{٤}{٥}$ | $\frac{٧}{١٠}$ |
| س × ص | ١٢ | ٢٠ | ٧٠ |

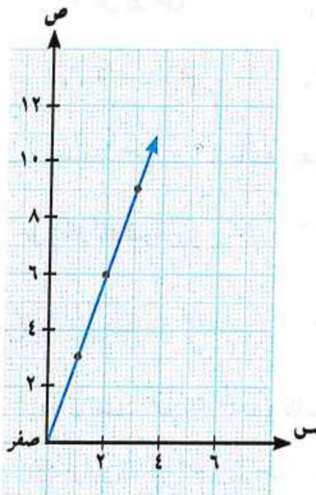
من الجدول (ا) نلاحظ أن: $\frac{س}{ص}$ تكون ثابتة ، س × ص تكون غير ثابتة

من الجدول (ب) نلاحظ أن: $\frac{س}{ص}$ تكون غير ثابتة ، س × ص تكون ثابتة

من الجدول (جـ) نلاحظ أن: $\frac{س}{ص}$ تكون غير ثابتة ، س × ص تكون غير ثابتة

• من الجـدول (ا) السابق نلاحظ أن العلاقـة بين المتغيرين س ، ص
وهى: (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٩)

عند تمثيلها بيانيًا فى نظام إحداثى متعامد هى علاقـة خطيـة ويمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) والعلاقة هى: ص = ٣ س



## أولًا التغير الطردى:

### تعريف

- **يقال إن ص تتغير طرديًا مع س (وتكتب ص ∝ س)**

**إذا كان: ص = م س ⟸ $\frac{ص}{س}$ = م ، بشرط أن: س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ ، م (ثابت)، م ∈ ح − {٠}**

### نقاط هامة

- إذا كانت: ص ∝ س، فإن: ص = م س ⟸ $\frac{ص}{س}$ = م ، م ∈ ح*

وهذه علاقة خطية تمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

- إذا كان ص ∝ س وأخذ المتغير س القيمتين $س_١$ ، $س_٢$ ، وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$ ، $ص_٢$ على الترتيب

فإن: $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ ⟸ $س_١ ص_٢ = س_٢ ص_١$

- إذا كانت: ص = م س ، فإن: ص ∝ س

## مثال ١

**إذا كانت: ص ∝ س ، وكانت: ص = ٥ ، عندما س = ١٠ ، فأوجد:**

**١ العلاقة بين ص ، س** **٢ قيمة ص عندما س = ٤٠**

### الحل

١ ∵ ص ∝ س ∴ ص = م س (م ≠ ٠) ∵ ص = ٥ عندما س = ١٠

∴ ٥ = ١٠ م ∴ م = $\frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ∴ العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٢}$ س

٢ عندما س = ٤٠ بالتعويض فى العلاقة ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ = ٢٠

**حل آخر للفقرة ٢** ∵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ ∴ $\frac{٥}{ص_٢} = \frac{١٠}{٤٠}$ ⟸ $ص_٢ = \frac{٤٠ \times ٥}{١٠} = ٢٠$

## سؤال ١

**إذا كانت: ص ∝ س، وكانت: ص = ١٤ ، عندما س = ٤٢ ، فأوجد:**

١ العلاقة بين ص ، س ٢ قيمة ص عندما س = ٦٠ (الجيزة ٢٠٢٣)

## مثـال ٢

إذا كانت: س ∝ ص$^2$ ، وكانت: س = ٨ عندما ص = ٢

**فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣**

**الحـل**

∵ س ∝ ص$^2$ ∴ س = م ص$^2$ (م ≠ ٠) بالتعويض عن قيمتى س ، ص فى العلاقة

∴ ٨ = ٤م ∴ م = $\frac{٨}{٤}$ = ٢ ∴ العلاقة هى س = ٢ص$^2$

عندما ص = ٣ فإن: س = ٢(٣)$^2$ = ١٨

## مثـال ٣

إذا كان: س$^2$ − ١٠ س ص + ٢٥ ص$^2$ = ٠ **فأثبت أن:** س ∝ ص

**الحـل**

س$^2$ − ١٠ س ص + ٢٥ ص$^2$ = ٠ ⟸ (س − ٥ ص)$^2$ = ٠

∴ س − ٥ ص = ٠ ⟸ س = ٥ ص

∴ س = ثابت × ص

∴ س ∝ ص وثابت التغير = ٥

**لاحظ أن**

- تحليل القدار الثلاثى المربع الكامل.
  أ$^2$ ± ٢ أ ب + ب$^2$ = (أ ± ب)$^2$
- لإثبات أن ص يتغير طرديًا مع س ، أى أن: ص ∝ س
  نثبت أن: ص = م س (حيث م ≠ ٠)

## سؤال ٢

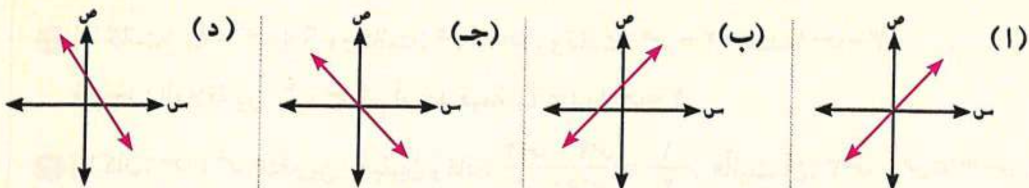
١ إذا كانت: ص ∝ $\sqrt[3]{س}$ وكانت: ص = $\frac{٤}{٥}$ عندما س = ٨ **فأوجد:**

(أ) العلاقة بين س ، ص (ب) قيمة س عندما ص = ٢

٢ إذا كان: ٤ س$^2$ − ١٢ س ص + ٩ ص$^2$ = ٠ **فأثبت أن:** ص ∝ س ، وإذا كانت: س = ١٢ **فأوجد** قيمة ص

٣ إذا كان: $\frac{١٦ س − ص}{٤ س − ع} = \frac{ص}{ع}$ **فأثبت أن:** ص ∝ ع

٤ أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص؟



## مثـال ٤

إذا كان: ص $\propto$ (٢س+ ١)، وكانت: ص = ١٢ عندما س= ١
فأوجد: العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س= -٥

**الحــل**

$\because$ ص $\propto$ (٢س+ ١) $\therefore$ ص = م(٢س+ ١) ، م ≠ ٠ $\because$ ص = ١٢ عندما س = ١

$\therefore$ ١٢ = م (٣) $\therefore$ م = ٤ $\therefore$ العلاقة هى: ص = ٤(٢س+ ١)

قيمة ص عندما س= -٥ $\therefore$ ص = ٤[٢(-٥) + ١] = -٣٦

## مثـال ٥

إذا كانت: ص= أ + ٧ ، أ $\propto$ س ، وكانت: أ = ٨ عندما س = ٢ ، فأوجد: العلاقة بين ص ، س

**الحــل**

$\because$ أ $\propto$ س $\therefore$ أ = م س ، $\because$ أ = ٨ عندما س = ٢ $\therefore$ ٨ = ٢ م

$\therefore$ م = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ $\therefore$ أ = ٤س $\therefore$ العلاقة هى: ص= ٤س + ٧

## مثـال ٦

إذا كان: س ، ص متغيرين حقيقيين موجبين وكان : $\frac{٢س - ٣ص}{س + ٥ص} = \frac{١}{٢}$
فأثبت أن: س $\propto$ ص وأوجد ثابت التناسب.

**الحــل**

$\because$ $\frac{٢س - ٣ص}{س + ٥ص} = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ ٤س - ٦ص = س + ٥ص $\Leftarrow$ ٤س - س = ٦ص + ٥ص

$\therefore$ ٣س = ١١ص $\therefore$ س= $\frac{١١}{٣}$ص $\therefore$ س $\propto$ ص وثابت التناسب = $\frac{١١}{٣}$

### سؤال ٣

١ إذا كانت: ص $\propto$ (س+ ١)، وكانت: ص = ٢ عندما س = ٣ فأوجد: العلاقة بين ص ، س

٢ إذا كانت: ع = ص + ٩ ، وكانت: ص $\propto$ س ، وكانت: ص = ١٢ عندما س= ٣ ،
فأوجد: العلاقة بين ع ، س ثم أوجد قيمة ع عندما س= ١

٣ إذا كان: س ، ص متغيرين حقيقيين وكان: $\frac{٢س - ٣ص}{س + ٥ص} = \frac{١}{٢}$ ، فأثبت أن: ٣س - ص $\propto$ ٣س + ص

## ثانيًا التغير العكسى:

**تعريف**

يقال إن ص تتغير عكسيًا بتغير س (وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$)

إذا كان: ص $= \frac{م}{س}$ أى أن: (س ص = م) حيث: م $\in$ ح − {٠} أى أن: م ثابت: م $\neq$ صفر

### نقاط هامة

- إذا كانت: ص $\propto \frac{1}{س}$ فإن ص $= \frac{م}{س}$ $\Longleftarrow$ س ص = م ، (م $\in$ ح*)
- إذا كانت: ص $\propto \frac{1}{س}$ وأخذ المتغير س القيمتين $س_1$ ، $س_2$

وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين $ص_1$ ، $ص_2$ على الترتيب.

فإن: $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ $\Longleftarrow$ $س_1 ص_1 = س_2 ص_2$

- إذا كانت: ص $= \frac{م}{س}$ أو س ص = م فإن ص $\propto \frac{1}{س}$

## مثال ٧

إذا كانت: ص $\propto \frac{1}{س}$ ، وكانت ص = ٦ عندما س = ٢ فأوجد:

١ العلاقة بين ص ، س ٢ قيمة ص عندما س = ١٢

**الحل**

١ ∵ ص $\propto \frac{1}{س}$ $\Longleftarrow$ ص $= \frac{م}{س}$ $\Longleftarrow$ ∴ س ص = م

∵ ص = ٦ عندما س = ٢ ∴ م = ٢ × ٦ = ١٢

∴ العلاقة هى: ص $= \frac{12}{س}$

٢ قيمة ص عندما س = ١٢ ∴ ص $= \frac{12}{12}$ $\Longleftarrow$ ص = ١

حل آخر للفقرة ٢ ∵ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ ∴ $\frac{6}{ص_2} = \frac{12}{2}$ $\Longleftarrow$ $ص_2 = \frac{6 \times 2}{12} = 1$

### سؤال ٤

إذا كانت ص تتغير طرديًا مع $\frac{1}{س}$ ، وكانت: ص = ٣ عندما س = ٢ فأوجد: (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

١ العلاقة بين ص ، س ٢ قيمة ص عندما س = ١,٥

## مثال ٨

إذا كانت: $أ^٢ \propto \frac{١}{\sqrt[٣]{ب}}$ ، وكانت: ب = ٨ عندما أ = ٣ ، فأوجد: ب عندما $أ = \frac{٣}{٢}$

**الحل**

$\because أ^٢ \propto \frac{١}{\sqrt[٣]{ب}}$ $\therefore أ^٢ = \frac{م}{\sqrt[٣]{ب}}$ $\because ب = ٨$ عندما أ = ٣ $\therefore ٩ = \frac{م}{٢}$

$\therefore م = ١٨$ $\therefore$ العلاقة هى: $أ^٢ = \frac{١٨}{\sqrt[٣]{ب}}$

عندما $أ = \frac{٣}{٢}$ فإن $\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{١٨}{\sqrt[٣]{ب}}$ $\therefore \sqrt[٣]{ب} = ١٨ \div \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢$

$\therefore \sqrt[٣]{ب} = ١٨ \times \frac{٤}{٩} = ٨$ $\therefore \sqrt[٣]{ب} = ٨$ $\therefore ب = ٥١٢$

## مثال ٩

إذا كانت: ص = أ + ٥ ، وكانت أ تتناسب عكسيًا مع س ، وكانت: ص = ٧ عندما س = ٢

**فاكتب: العلاقة بين ص ، س**

**الحل**

$أ \propto \frac{١}{س}$ $\therefore أ = \frac{م}{س}$ $\therefore ص = \frac{م}{س} + ٥$

$\because ص = ٧$ عندما س = ٢ $\therefore ٧ = \frac{م}{٢} + ٥$ $\therefore \frac{م}{٢} = ٧ - ٥ \Leftarrow \frac{م}{٢} = ٢$

$\therefore م = ٤$ $\therefore$ العلاقة هى: $ص = \frac{٤}{س} + ٥$

## مثال ١٠

إذا كانت: $س^٢ + \frac{٢٥}{ص^٢} = \frac{١٠ س}{ص}$ فأثبت أن : س تتغير عكسيًا مع ص وأوجد ثابت التناسب.

**الحل**

$\therefore س^٢ - ١٠ \times \frac{س}{ص} + ٢٥ \times \frac{١}{ص^٢} = ٠$ $\therefore \left(س - \frac{٥}{ص}\right)^٢ = ٠$ $\therefore س = \frac{٥}{ص}$

$\therefore$ س تتغير عكسيًا مع ص وثابت التناسب = ٥

### سؤال ٥

١ إذا كان: ص = أ + ٩ حيث $أ \propto \frac{١}{س^٢}$ ، وكانت ص = ١٧ عندما $س = \frac{١}{٢}$ **فأوجد:**

( أ ) العلاقة بين ص ، س (ب) قيمة س عندما ص = ٢٥

٢ إذا كان: $س^٢ص^٢ - ٦ س ص + ٩ = ٠$ **فأثبت أن:** $س \propto \frac{١}{ص}$

## ثالثًا بعض تطبيقات على التغير الطردى والتغير العكسى:

١ محيط الدائرة (ح) يتغير بتغير طول نصف القطر نق أى أن: ح $\propto$ نق

∴ ح = ثابت × نق والثابت = ٢$\pi$ لأن ح = ٢$\pi$ نق

٢ مساحة المربع (م) تتغير بتغير مربع طول ضلعه (ل$^{٢}$) أى أن: م $\propto$ ل$^{٢}$

∴ م = ثابت × ل$^{٢}$ والثابت = ١ لأن م = ل$^{٢}$

## مثال ١١

إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على الأرض (ر)، وإذا كان وزن الجسم ١٠٥ كجم على الأرض ووزنه ١٥ كجم على القمر، **فكم يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١١٢ كجم؟**

### الحل

∵ $و_{١}$ = ١٥ كجم ، $و_{٢}$ = ؟ ، $ر_{١}$ = ١٠٥ كجم ، $ر_{٢}$ = ١١٢ كجم

∵ و $\propto$ ر ∴ $\frac{و_{١}}{و_{٢}} = \frac{ر_{١}}{ر_{٢}}$ ⟸ ∴ $\frac{١٥}{و_{٢}} = \frac{١٠٥}{١١٢}$ فإن: $و_{٢} = \frac{١٥ \times ١١٢}{١٠٥}$ = ١٦ كجم

### حل آخر

∵ و $\propto$ ر

∴ و = م ر ⟸ م = $\frac{و}{ر} = \frac{١٥}{١٠٥} = \frac{١}{٧}$ ∴ العلاقة هى: و = $\frac{١}{٧}$ ر

∵ ر = ١١٢ كجم ∴ و = $\frac{١}{٧}$ × ١١٢ = ١٦ كجم

### س؟ سؤال ٦

تتحرك سيارة كتلتها ٣ أطنان بسرعة منتظمة تحت تأثير مقاومة تتناسب طرديًا مع سرعتها، فإذا كانت المقاومة ٦ ث. كجم/ طن من كتلة السيارة عندما كانت سرعتها ٥٠ كم/ س **فأوجد** سرعة السيارة إذا كانت المقاومة ٢٧ ث. كجم/ طن

## مثال ١٢

إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة ع يتغير عكسيًا مع مربع نصف قطر قاعدة الأسطوانة نق ، وكانت ع = ٢٧ سم عندما نق = ٥ , ١٠ سم ، **فأوجد** ع عندما نق = ٧٥ , ١٥ سم.

**الحل**

$\because$ $ع_١ = ٢٧$ سم ، $ع_٢ = ؟$ ، $نق_١ = ٥ , ١٠$ سم ، $نق_٢ = ١٥ , ٧٥$ سم

$\because$ $ع \propto \frac{١}{نق^٢} \Leftarrow \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{نق_٢^٢}{نق_١^٢}$ ، $\frac{٢٧}{ع_٢} = \frac{(١٥ , ٧٥)^٢}{(١٠ , ٥)^٢}$ ، $ع_٢ = \frac{٢٧ \times (١٠ , ٥)^٢}{(١٥ , ٧٥)^٢} = ١٢$ سم

## مثال ١٣

بيِّـن أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا؟ وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا؟ وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا؟ مع ذكر السبب فى كل حالة.

١

| س | ص |
|---|---|
| ٥ | ١٢ |
| ٣ | ٢٠ |
| ٤ | ١٥ |
| ١ | ٦٠ |
| ٦ | ١٠ |

٢

| س | ص |
|---|---|
| ٢ | ٩ |
| ٦ | ٢٧ |
| ١٢ | ٥٤ |
| ١٠ | ٤٥ |
| -٢٠ | -٩٠ |

٣

| س | ص |
|---|---|
| ٣ | ١٢ |
| -٦ | ٦ |
| ٤ | -٩ |
| ١ | ٣٦ |
| ٢ | ١٨ |

**الحل**

١ يمثل تغيرًا عكسيًا

**لأن:** س × ص = ثابت = ٦٠

٢ يمثل تغيرًا طرديًا

**لأن:** $\frac{ص}{س}$ = ثابت = $\frac{٩}{٢}$ = ٥ , ٤

٣ ليس تغيرًا طرديًا

**لأن:** $\frac{١٢}{٣} \neq \frac{٦}{-٦}$

ليس تغيرًا عكسيًا

**لأن:** ٣ × ١٢ ≠ -٦ × ٦

## س؟ سؤال ٧

١ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة مسافة ١٢٠ كم فى ٤ ساعات، فكم المسافة التى تقطعها السيارة فى ٧ ساعات؟ (موقع الوزارة)

٢ حدد: أى من الجداول التالية يمثل تغيرًا طرديًا؟ وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا؟ وأيها غير ذلك؟ مع ذكر السبب.

( أ )

| س | ص |
|---|---|
| ٣ | ٧ |
| ١٢ | ٢٨ |
| ٣٠ | ٧٠ |
| ١٥ | ٣٥ |

(ب)

| س | ص |
|---|---|
| ٦٠ | ٦ |
| ١٢ | ٣٠ |
| ٤ | ٩ |
| ٢ | ١٨ |

(جـ)

| س | ص |
|---|---|
| ٥ | ١٦ |
| ٢ | ٤٠ |
| ٨ | ١٠ |
| ٤ | ٢٠ |




# التغير الطردى والتغير العكسى

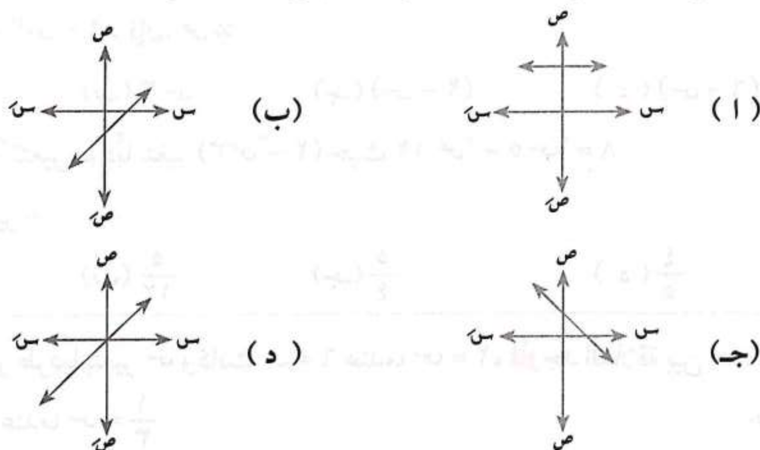
▲تذكر ▲فهم ▲تطبيق ▲تحليل

## تدريبات الأضــواء

## أولًا التغير الطردى:

### ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الشكل الذى يمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين س ، ص هو .................. (القاهرة ٢٠١٨)




٢ العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص هى .................. (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥}$ (د) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$

٣ إذا كان: ص = م س حيث م (ثابت) ≠ صفر، فأى العبارات الآتية تكون خطأ؟ ........ (الشرقية ٢٠١٩)

(أ) ص ∝ س (ب) س ∝ ص (جـ) س = $\frac{١}{م}$ ص (د) س ∝ $\frac{١}{ص}$

٤ إذا كانت: س = ٥ ص ، فإن: س تتغير طرديًا مع .................. (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

(أ) ص (ب) $ص^٢$ (جـ) $\sqrt{ص}$ (د) $\frac{١}{ص}$

٥ إذا كانت: ص ∝ س ، وكانت س = ٤ عندما ص = ٥ , ١ ، فإن ثابت التغير يساوى ..................

(أ) ٦ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ٢٤ (د) $\frac{٣}{٨}$

٦ إذا كانت: ص ∝ س ، ص = ٢ عندما س = ٨ ، فإن: ص = ٣ عندما س = .................. (البحيرة ٢٠١٨)

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦

٧ إذا كانت: ص ∝ س، وكانت ص = ٥ عندما س = ١٥، فإن: س = ٩ عندما ص = ......... (الفيوم ٢٠١٨)

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٨ إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًا مع عدد المشتركين س فإن ..................

(أ) ص = أ س
(ب) ص = $\frac{أ}{س}$
(جـ) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠)
(د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

٩ إذا كان: ص$^{٢}$ + ٤ س$^{٢}$ = ٤ س ص، فإن .................. (جنوب سيناء ٢٠١٩)

(أ) ص ∝ س
(ب) ص ∝ س$^{٢}$
(جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$
(د) ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

١٠ إذا كان: ص = ٣س − ٦ ، فإن: ص ∝ ..................

(أ) س
(ب) ٣ س
(جـ) (س − ٢)
(د) (س − ٦)

١١ إذا كانت: س$^{٣}$ تتغير طرديًا بتغير (٣ص$^{٢}$ − ٢) حيث ١٢ ص$^{٢}$ − ٥ س$^{٣}$ = ٨

فإن ثابت التغير = ..................

(أ) $\frac{-١}{٢}$
(ب) $\frac{٥}{١٢}$
(جـ) $\frac{٥}{٤}$
(د) $\frac{٤}{٥}$

---

٢ إذا كانت: ص تتغير طرديًا بتغير س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢، **فأوجد** العلاقة بين س ، ص، ثم أوجد قيمة ص عندما س = $\frac{١}{٣}$ (القاهرة ٢٠١٨)

---

٣ إذا كانت: أ ∝ ب ، وكانت أ = ٣ عندما ب = ٢ **فأوجد:** (الجيزة ٢٠١٨)

١ العلاقة بين أ ، ب
٢ قيمة أ عندما ب = $\frac{٢}{٣}$

---

٤ إذا كانت: ص ∝ س$^{٢}$، وكانت ص = ٣٦ عندما س = ٣ **فأوجد:** (الإسماعيلية ٢٠١٨)

١ العلاقة بين س ، ص
٢ قيمة ص عندما س = $\frac{١}{٢}$

---

٥ إذا كانت: $\frac{٢١ س − ص}{٧ س − ع} = \frac{ص}{ع}$ ،

**فأثبت أن:** ص ∝ ع (حيث س ≠ ٠) (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

---

٦ إذا كانت: ص = ٢ + ب حيث ب ∝ س ، وكانت س = ١ عندما ص = ٥،

**فأوجد** العلاقة بين ص ، س، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢ (الدقهلية ٢٠١٧)

---

٧ إذا كانت: س = ل + ٩ وكانت ل ∝ ص ، وكانت س = ٢٤

عندما ص = ٥، **فأوجد** العلاقة بين س ، ص، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٢

٨ إذا كانت: $أ$ = حـ + ٣، وكانت حـ $\propto$ ب، وكانت $أ$ = ٨ عندما ب = ٥، **فأوجد** العلاقة بين $أ$ ، ب

٩ إذا كانت: ص $\propto$ س، **فأثبت أن:**

١ ص$^{٢}$ $\propto$ س$^{٢}$

٢ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ $\propto$ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$

١٠ إذا كان: $أ \propto$ ب، **فأثبت أن:** $أ^{٢}$ + ب$^{٢}$ $\propto$ $أ$ ب

١١ إذا كانت: $أ$ ، ب ، حـ ثلاثة متغيرات حقيقية وكان $أ \propto$ حـ، ب $\propto$ حـ

**فأثبت أن:** $أ$ ب $\propto$ حـ$^{٢}$

## ثانيًا التغير العكسى:

١٢ **اختر الإجابة الصحيحة:**

١ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س فإن .................. (الجيزة ٢٠١٨)

(أ) ص = س (ب) ص = م س (جـ) س = م ص (د) ص = $\frac{م}{س}$

٢ إذا كانت: ص $\propto \frac{١}{س}$ فإن $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{......}{......}$ (القليوبية ٢٠١٨)

(أ) $\frac{م س_١}{س_٢}$ (ب) $\frac{س_١}{س_٢}$ (جـ) $\frac{س_٢}{س_١}$ (د) $\frac{١}{س_١ س_٢}$

٣ العلاقة التى تمثل تغيرًا عكسيًا بين المتغيرين ص ، س هى .................. (القاهرة ٢٠١٨)

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$ (د) ص = ٢ س

٤ إذا كانت: س ص = ١ فإن ص تتغير مع .................. (بنى سويف ٢٠١٩)

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) (س − ١) (جـ) س (د) (س + ١)

٥ إذا كانت: ص = $\frac{٥}{س}$ ، فإن: ص تتغير عكسيًا مع .................. (بورسعيد ٢٠١٨)

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س (جـ) $\frac{١}{ص}$ (د) $\frac{١}{س ص}$

٦ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{٥}{ص}$ فإن س $\propto$ .................. (الشرقية ٢٠٢٣)

(أ) ص$^{٢}$ (ب) ص (جـ) $\frac{١}{ص}$ (د) ٥ ص

٧ إذا كان ٣ س ص = ١٠ ، فإن: س $\propto$ .................. (الجيزة ٢٠١٩)

(أ) ص$^{٢}$ (ب) $\frac{١}{ص^{٢}}$ (جـ) ص (د) $\frac{١}{ص}$

٨ إذا كانت: $ص \propto \frac{١}{س}$ ، $س \propto ع$ ، فإن: $ص \propto$ ..............

(أ) $س ع$ (ب) $\frac{ع}{س}$ (جـ) $\frac{س}{ع}$ (د) $\frac{١}{ع}$

٩ إذا كان: $س^٢ ص^٢ + \frac{١}{٤} = س ص$ فإن ..............

(أ) $ص \propto \frac{١}{س}$ (ب) $ص \propto س^٢$ (جـ) $ص \propto س$ (د) $ص \propto \frac{١}{س^٢}$

١٠ إذا كانت: $ص = \frac{١}{٣س - ٦}$ ، فإن: $ص \propto$ ..............

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) $\frac{١}{٣س}$ (جـ) $\frac{١}{(س - ٢)}$ (د) $\frac{١}{(س - ٦)}$

١١ إذا كانت: $ص - س = \frac{١}{س} - \frac{١}{ص}$ حيث $س \neq ص \neq ٠$ ، فإن ..............

(أ) $ص \propto \frac{١}{س}$ (ب) $ص \propto \frac{١}{س^٢}$ (جـ) $ص \propto س$ (د) $ص \propto س + ١$

١٢ إذا كانت أ تتغير عكسيًا بتغير $ب^٣$ وكان ثابت التغير ١٢٨ فإن أ = ٢ عندما ب = ..........

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦٤ (د) ١٠٢٤

١٣ إذا كانت: $ص \propto \frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن س تتناسب ..............

(أ) طرديًا مع $ص^٢$ (ب) عكسيًا مع $ص^٢$

(جـ) عكسيًا مع ص (د) عكسيًا مع $\sqrt{ص}$

١٤ إذا كانــت أ تتغير عكســيًا بتغير ب ، وكان ثابــت التغير $ك_١$ ، وكانت ب تتغير عكســيًا بتغير حـ وكان ثابت التغير $ك_٢$ ، فإن أ تتغير .............. بتغير حـ ، وثابت التغير ..............

(أ) طرديًا، $ك_١ ك_٢$ (ب) عكسيًا، $\frac{ك_٢}{ك_١}$

(جـ) طرديًا، $\frac{ك_٢}{ك_١}$ (د) طرديًا، $\frac{ك_١}{ك_٢}$

---

**١٣** إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع س وكانت: ص = ٢ عندما س = ٤ ، **فأوجد:** (أسوان ٢٠٢٢)

١ العلاقة بين ص ، س

٢ قيمة ص عندما س = ١٦

---

**١٤** إذا كانت: $ص \propto \frac{١}{س}$ ، وكانت: ص = ٤ عندما س = ١,٥ **فأوجد:** (الوادى الجديد ٢٠١٨)

١ العلاقة بين س ،ص ٢ قيمة ص عندما س = ٢

**١٥** إذا كانت: ص $\propto \frac{١}{س}$ ، وكانت: س = $٢\frac{٤}{٥}$ عندما ص = $\frac{٤}{٧}$ ، **فأوجد:**

قيمة ص عندما س = $٣\frac{١}{٥}$ (القليوبية ٢٠١٩)

---

**١٦** إذا كانت: س$^٢$ص$^٢$ − ٦ س ص + ٩ = ٠ فأثبت أن: ص تتغير عكسيًا مع س (دمياط ٢٠٢٢)

---

**١٧** إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع س$^٢$ حيث ص = ٩ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ **فأوجد:** (الشرقية ٢٠١٩)

١ العلاقة بين ص ،س ٢ قيمة ص عندما س = $\frac{١}{٢}$

---

**١٨** إذا كانت: ص = ١ + ب حيث ب تتغير عكسيًا مع مربع س حيث س = ١ عندما ص = ٥

**فأوجد** العلاقة بين س ، ص ، ثم **أوجد** قيمة ص عندما س = ٢ (الفيوم ٢٠٢٣)

---

**١٩** إذا كانت: ص = ب − ٥، ب $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ب = ٤ عندما س = ٢ **فأوجد** العلاقة بين س ، ص

---

**٢٠** إذا كانت: ص$^٢$ $\propto \frac{١}{س^٣}$ وكانت س = ٨ عندما ص = ٣ **فأوجد** قيمة س عندما ص = $\frac{٣}{٢}$ (موقع الوزارة)

## ثالثًا بعض التطبيقات على التغير الطردى والتغير العكسى:

**٢١** سيارة تسير بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ٩٠كم فى ساعة ونصف الساعة، **فاكتب** العلاقة بين المسافة والزمن، ثم **أوجد** المسافة المقطوعة للسيارة فى ٢,٥ ساعة.

---

**٢٢** إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل، فإذا أنجز العمل ٨ عمال فى ٥ ساعات، **فما الزمن** الذى يستغرقه ١٠ عمال لإنجاز هذا العمل؟

---

**٢٣** إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (م/ ث) والزمن ن (ثانية) هى ع = ٩,٨ ن **فأجب:**

١ **حدد** نوع التغير بين ع ، ن ٢ **أوجد** قيم ع عندما ن = ٢ ثانية، ن = ٤ ثوان.

٣ **أوجد** قيمة ن عندما ع = ٢٤,٥ م/ ث.

---

**٢٤** إذا كانت شدة الاستضاءة (ش) لمصباح تتغير عكسيًا مع مربع بُعد المصباح (ف) عن تلميذ يذاكر دروسه على بُعد ١٢ مترًا وإذا كانت شدة الاستضاءة ضعيفة **فما هو البُعد** الذى يوضع فيه المصباح حتى تزيد قوة الاستضاءة إلى أربعة أمثالها؟

**٢٥** من بيانات الجدول الآتى أجب عن السؤالين الآتيين: (المنيا ٢٠١٨)

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ١ | ٣ | ٥ |
| ص | ٢ | ٦ | ١٠ |

١ نوع التغير بين ص ، س

٢ أوجد قيمة ص عندما س = $\frac{٣}{٢}$

---

**٢٦** أكمل الجدول التالى فى كل من الحالتين الآتيتين:

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ٣ | ٩ | ..... |
| ص | ٤ | ..... | ٢٤ |

١ ص تتغير عكسيًا مع س

٢ ص تتغير طرديًا بتغير س

## تفكير إبداعى TIMSS

**٢٧** إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = ٢$ ، وكان أ $س^٢$ + ٢ ب س ص + جـ $ص^٢$ = ٠ فأثبت أن: س $\propto$ ص

---

**٢٨** إذا كان س ، ص متغيرين، حيث ص تتناسب مع المعكوس الضربى للمقدار $\frac{١}{س^٣}$ (حيث س ≠ ٠) وكانت ص = ١٢ عندما س = ٢ فأوجد العلاقة بين: س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١

---

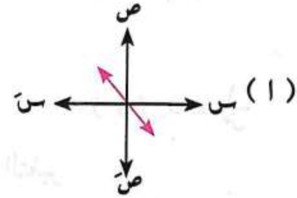
**٢٩** إذا كان $(\frac{١}{٢} س - ١) \propto \frac{ص}{٢}$ ، $(\frac{١}{٤} س^٢ + \frac{١}{٢} س + ١) \propto \frac{٢}{ص^٢}$

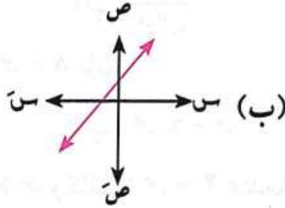
فأثبت أن : $\frac{١}{٨} س^٣ - ١$ تتغير عكسيًا مع ص

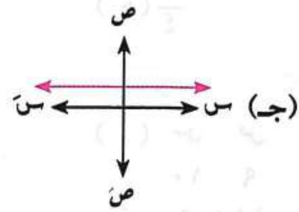
## تدريبات الكتاب المدرسى

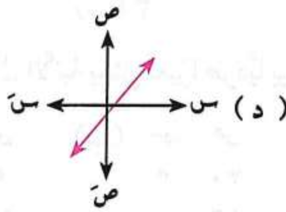
**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص؟ .................. (الغربية ٢٠١٣)




٢ العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص ، س هى .................. (سوهاج ٢٠٢٠)

( ا ) س ص = ٥　　(ب) ص = س + ٣　　(جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$　　( د ) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س ، وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

فإن ثابت التناسب يساوى .................. (الوادى الجديد ٢٠٢٠)

( ا ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$　　(جـ) ٢　　( د ) ٦

---

**٢ (الحساب العقلى): من بيانات الجدول التالى أجب عن الأسئلة الآتية:** (دمياط ٢٠٢٤)

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ٢ | ٤ | ٦ |
| ص | ٦ | ٣ | ٢ |

( ا ) بين نوع التغير بين ص ، س　　(ب) أوجد ثابت التناسب.

(جـ) أوجد قيمة ص عندما س = ٣　　( د ) أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت: س ∝ ص فإن س = ............... حيث م ثابت، م ≠ ٠ (الفيوم ٢٠٢٣)

(أ) م + ص (ب) $\frac{١}{م ص}$ (جـ) $\frac{م}{ص}$ (د) م ص

٢ إذا كانت: س ص = ٨ فإن ............... (البحر الأحمر ٢٠١٨)

(أ) س ∝ ص (ب) ص ∝ – س (جـ) ص ∝ ٨ س (د) س ∝ $\frac{١}{ص}$

٣ إذا كانت: ص ∝ س وكانت: ص = ٢ عندما س = ٨ ، فإن ثابت التغير ............... (قنا ٢٠٢٢)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٤ أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص ...؟ (بورسعيد ٢٠١٩)

(أ)

| س | ص |
|---|---|
| ٢ | ٩ |
| ٤ | ١٨ |

(ب)

| س | ص |
|---|---|
| ٣ | ٢٠ |
| ٥ | ١٢ |

(جـ)

| س | ص |
|---|---|
| ٣ | ٦ |
| –٢ | –٩ |

(د)

| س | ص |
|---|---|
| ١٠ | ٩ |
| ٥ | ١٨ |

٥ إذا كانت: س ص = ٥ ، فإن ص ∝ ............... (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) $س^{-١}$ (ب) س (جـ) ٥ س (د) $س^{٢}$

٦ إذا كانت: ٩ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل فإن: $س^{٢}$ ص = ............... (الإسكندرية ٢٠١٧)

(أ) ٩ (ب) $\frac{١}{٩}$ (جـ) ٩٠ (د) ٨١

---

## ٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كانت: ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد: (الغربية ٢٠١٨)

(أ) العلاقة بين س ، ص (ب) قيمة س عندما ص = ٦

٢ إذا كان: $س^{٢}ص^{٢}$ – ٤ س ص = –٤ ، فأثبت أن: س تتغير عكسيًا مع ص (الدقهلية ٢٠١٨)

٣ إذا كانت ل ∝ م ، وكانت ل = ٢٠ عندما م = ٧ ، فأوجد: العلاقة بين ل ، م ، (الشرقية ٢٠١٨)

ثم أوجد: م عندما ل = ٤٠

٤ إذا كانت: ص = ك + ٥ حيث ك ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ ، وكانت: ص = ٦ عندما س = ١ (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

فأوجد: العلاقة بين س ، ص ، ثم أوجد: قيمة ص عندما س = $\frac{١}{٢}$

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ..................

(أ) $\frac{ب}{جـ}$ (ب) $\frac{جـ}{د}$ (جـ) جـ د (د) $\frac{ب}{د}$

٢ الوسط المتناسب بين العددين ٥ ، ١٢٥ هو ............

(أ) ٢٥ (ب) -٢٥ (جـ) ± ٢٥ (د) ٥

٣ إذا كان ٢ س = ٧ ص فإن: $\frac{س}{ص}$ = ..................

(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) ١٤ (جـ) $\frac{١}{١٤}$ (د) $\frac{٢}{٧}$

٤ إذا كان أ = $\frac{٣}{ب}$ فإن: أ ∝ ..................

(أ) ب (ب) $\frac{١}{ب}$ (جـ) $\frac{١}{ب^٢}$ (د) ٣ب

٥ إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ فإن: ص تتناسب ..................

(أ) طرديًا مع س (ب) طرديًا مع $س^٣$ (جـ) طرديًا مع $س^٢$ (د) عكسيًا مع $س^٢$

٦ العدد الذى يضاف إلى كل من الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٥ بالترتيب لتكون فى تناسب متسلسل هو ......

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٧ إذا كانت سـ × صـ = {(٣ ، ١) ، (٣ ، ٥)} فإن : ن (سـ) = .................. (الجيزة ٢٠٢٢)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٨ إذا كانت النقطة (ك ، ٣ - ك) تقع على محور السينات فإن : ك = .................. (المنيا ٢٠٢١)

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ٥

٩ الدالة د : د (س) = ٧ يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بالنقطة .................. (الشرقية ٢٠٢٣)

(أ) (٧ ، ٧) (ب) (٧ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، ٣)

## ٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كانت $ص^{٢} \propto \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}}$ ، وكانت س = ٨ عندما ص = ٣ ،

**فأوجد** قيمة س عندما ص = $١ \frac{١}{٢}$

٢ إذا كانت الكميات أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل،

**فأثبت:** $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}}{ب^{٢} + حـ^{٢} + ء^{٢}} = \frac{أ\ حـ}{ب\ ء}$ (الإسكندرية ٢٠٢٤)

٣ إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ وكان أ = ٤ حـ = ٤ ،

**فأوجد** قيمة المقدار $أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}$ (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

٤ إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{حـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥حـ}{٣ س}$ **فأوجد** قيمة س (الغربية ٢٠٢٣)

٥ إذا كانت س ، ٤ ، ٦ ، ٢ أربع كميات متناسبة **فأوجد** قيمة س (بورسعيد ٢٠٢٣)

٦ إذا كان $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{حـ}{ء - حـ}$ **فأثبت أن:** أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة.

٧ مثل بيانيًا منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ٣)^{٢}$ مستعينًا بالفترة [١ ، ٥] ومن الرسم **أوجد:**

( أ ) معادلة محور تماثل المنحنى.

(ب) القيمة الصغرى للدالة. (القاهرة ٢٠٢٤)

**١** إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + حـ}{٦} = \frac{حـ + أ}{٥}$ **فأثبت أن** $\frac{أ + ب + حـ}{أ} = ٧$

**٢** إذا كان ص = أ – ٩ وكان ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

**فأوجد** العلاقة بين ص ، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١ (الأقصر ٢٠٢٣)

**٣** إذا كان $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ **فأثبت أن** ص ∝ ع (دمياط ٢٠٢٣)

**٤** إذا كان س$^٤$ ص$^٢$ – ١٤ س$^٢$ص + ٤٩ = ٠ **فأثبت أن** ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ (الإسكندرية ٢٠١٩)

**٥ الربط بالفلك :**

إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على القمر (ر)،

فإذا كان $و_١$ = ١٨٢ كجم ، $ر_١$ = ٣٥ كجم **فأوجد** $ر_٢$ عندما $و_٢$ = ٣١٢ كجم. (الأقصر ٢٠٢٢)

**٦ الربط بالفيزياء :**

إذا كان مقدار السرعة (ع) التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (نق) وكانت ع = ٥ سم / ث عندما نق = ٣ سم

**فأوجد** ع عندما نق = ٢,٥ سم.

# الوحدة ٣ الإحصاء



## أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

### الدرس الأول: جمع البيانات

- يتعرف أنواع مصادر البيانات.
- يتعرف أساليب جمع البيانات.
- يتعرف أنواع العينات وكيفية اختيارها.

### الدرس الثانى: التشتت

- يتعرف مقاييس التشتت (المدى - الانحراف المعيارى).
- يحسب المدى ويحسب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى بسيط وتوزيع تكرارى ذى مجموعات.




# ذاكر الدرس ١ جمــــع البيانــــات

**فكر وناقش:**

- **الإحصـاء هو العلم الذى يهتم بجمع البيانات وترتيبها وتصنيفها وتحليلها وتفسيرها واستخلاص النتائج للوصول إلى اتخاذ قرارات مبنية على أسس علمية صحيحة.**
- تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الإحصائى.

ويترتب على جمع البيانات بأسـلوب علمى صحيح نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائى واتخاذ القرارات المناسبة.

## أولًا مصادر جمع البيانات:

**تنقسم مصادر جمع البيانات إلى:**

| | مصادر أوليـة (ميدانيــة) | مصادر ثانويـة (تاريخيـة) |
|---|---|---|
| **التعريف** | • هى المصادر التى نحصل منها على البيانات **بشكل مباشر.** | • هى المصادر التــى نحصل منها على البيانات **بواسطة هيئات أو مؤسسات أو أفراد.** |
| **أمثلــة** | • المقابلات الشخصية والاستبيان ( استطلاعات الرأى).<br>• الملاحظة والقياس. | • نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء.<br>• قاعدة بيانات الموظفين بإحدى الشركات.<br>• وسائل الإعلام والإنترنت. |
| **المميزات** | • الدقـة. | • توفير الوقت والمال والجهد. |
| **العيوب** | • تحتاج إلى وقت ومجهود وتكلفة كبيرة.<br>• تحتاج إلى عدد كبير من الباحثين. | • عدم دقة بعض المصادر أحيانًا. |

## ثانيًا أساليب جمع البيانات:

- يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعًا **للهدف المراد لأجله جمع هذه البيانات** وحجم المجتمع الإحصائى محل البحث.
- **المجتمع الإحصائى يعرف بأنـه:** هو جميع المفردات التى تجمعها خصائص عامة واحدة.

**فمثلًا:** • تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعًا إحصائيًّا تكون مفردته التلميذ.

• عمال أحد المصانع يمثلون مجتمعًا إحصائيًّا مفردته العامل.

- وهناك أسلوبان لجمع البيانات، هما: (١) **أسلوب الحصر الشامل.** (٢) **أسلوب العينات.**

## أساليب جمع البيانـــات

| | (١) أسلوب الحصر الشامل | (٢) أسلوب العينات |
|---|---|---|
| التعريف | • هو جمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى بصورة مباشرة. | • هو جمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من عينة ممثلة للمجتمع كله وإجراء البحث عليها، ثم تعميم النتائج على المجتمع كله. |
| أمثلة لاستخداماته | • الانتخابات.<br>• التعداد العام للسكان.<br>• عمل قاعدة بيانات للعاملين فى إحدى الشركات أو المؤسسات. | • فحص عينة دم مريض.<br>• معرفة درجة تلوث عينة من المياه بالخزان.<br>• فحص عينة من منتجات أحد المصانع. |
| المميزات | • الدقة.<br>• الشمول.<br>• عدم التحيز.<br>• تمثيل جميع مفردات المجتمع الإحصائى. | • توفير الوقت والجهد والتكاليف.<br>• الطريقة الوحيدة لدراسة بعض المجتمعات المحدودة والتى يتعذر فيها استخدام أسلوب الحصر الشامل.<br>مثل (فحص بعض من دم مريض)؛ لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة.<br>• الطريقة الوحيدة لجمع بيانات عن المجتمعات الكبيرة غير المحدودة، مثل (مجتمع الأسماك). |
| العيوب | • يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير، وتكلفة باهظة. | • عدم الدقة.<br>• عدم الشمول.<br>• التحيز: إذا كانت العينة المختارة غير ممثلة للمجتمع الإحصائى تمثيلًا جيدًا. |

**تعريـف**

**العينــة:** هى جزء صغـير من مجتمع كبير تشبـه المجتمع وتمثـله.

**طـرق اختيار العينــة**

| | اختيـار متحيـز (العينـات غير العشـوائية) | اختيـار عشوائـى (العينـات العشـوائية) |
|---|---|---|
| التعريف | • هو اختيـــار عينة بطريقة تناســب أهداف البحث، وتعرف بـ (العينة العمدية). | • هو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع متساوية (لها نفس الفرصة فى الاختيار). |
| أمثلــة | • اختيار مجموعة من المرضى لدراسة حالتهم الصحية ومدى تطور الحالة. | • اختيار عينة من الخريجين لمعرفة نوع التعليم. |

## أنواع العينات العشوائية:

**تنقسم العينات العشوائية إلى:**

| العينـة العشـوائية (البسيطـة) | العينـة العشـوائيـة (الطبقيــة) |
|---|---|
| • أبسط أنواع العينات.<br>• تستخدم فى حالة المجتمعات المتجانسة.<br>• يتوقف اختيارها على **حجم وعدد مفردات المجتمع**. | • يتم تقسيم المجتمعات إلى طبقات، ويختار الباحث **عينة عشوائية من كل طبقة**.<br>• تســتخدم فى حالة المجتمعات **غير المتجانســة**؛ (أى أنــه يتكون مــن مجموعــات نوعية تختلف فى الصفات) |

• **وفيما يلى سوف نقوم بشرح كل نوع من هذه العينات بالتفصيل.**

١ **العينة العشوائية البسيطة:**

**يتم اختيار العينة العشوائية البسيطة بطريقتين:**

**الطريقة الأولى: إذا كان حجم المجتمع (صغيرًا) به ٤٠ أو ٥٠ فردًا:**



- ترقيم جميع مفردات المجتمع محل الدراسة.
- نقوم بعمل بطاقات متماثلة نكتب فيها هذه الأرقام.
- توضع هذه البطاقات داخل صندوق وتخلط جيدًا، ويتم سحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق.
- تكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

**الطريقة الثانية: إذا كان حجم المجتمع (كبيرًا):**

- ترقيم جميع مفردات المجتمع محل الدراسة.
- تختار العينة باستخدام خاصية الرقم العشوائى الموجود بالآلة الحاسبة كالآتى:




من اليسار إلى اليمين on Shift Ran# =

- فيظهر رقم عشرى بين ٠,٠٠٠ ، ٠,٩٩٩
نهمل العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩
- تكرار الضغط على مفتاح = يتوالى ظهور الأرقام إلى أن نصل إلى عدد عناصر العينة الذى نريده.

## نقاط هامة

- من الممكن اختيار أرقام عشوائية صحيحة مباشرة فى نطاق معين من الأرقام باستخدام الآلات الحاسبة الحديثة، وليكن **Fx -570 E 5**
كالآتى: on Alpha Ran int# ( 100 Shift , ) 300 ) =

فتظهر أعداد صحيحة محصورة بين ١٠٠ ، ٣٠٠

وبتكرار الضغط على مفتاح = يتوالى ظهور الأعداد فى النطاق المطلوب.

## مثال ١

شركة بها ٣٠٠ موظف، وتريد إدارة الشركة معرفة آرائهم عن تنظيم رحلات مصيفية. فقامت بإعطاء كل موظف رقمًا من ٥٠١ إلى ٨٠٠، واختيار ١٠٪ منهم عينة عشوائية لسؤالهم عن المصايف المقترحة.

**حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام الموظفين المستهدفين فى هذه العينة.**

### الحل

∵ عدد موظفى الشركة هو ٣٠٠     ∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٠٠ = ٣٠ موظفًا

أى أننا نريد اختيار ٣٠ موظفًا لإجراء الاستبيان، ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كالآتى:

١ يعطى كل موظف رقمًا من ٥٠١ إلى ٨٠٠

٢ تستخدم الآلة الحاسبة لاختيار ٣٠ رقمًا تنحصر بين ٥٠١ ، ٨٠٠

on Alpha Ran int # ( 5 0 1 , 8 0 0 ) =

• وبفرض أن الآلة الحاسبة أخرجت الأرقام الموضحة بالجدول المقابل فيكون الموظفون الذى يحملون هذه الأرقام هم العينة المختارة لإجراء الاستبيان.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٧٨٩ | ٦٣٩ | ٧٧٠ | ٥٥١ | ٧٦٦ |
| ٦٨٩ | ٥٢٧ | ٧٠٠ | ٦٩٧ | ٦١٢ |
| ٧٨٠ | ٦٧٢ | ٦٩٤ | ٧٦٤ | ٧٢٠ |
| ٦٩٩ | ٥٩٠ | ٦٧٥ | ٧١٠ | ٧٠٩ |
| ٥٥٤ | ٧٥٨ | ٥٤٥ | ٧٧٦ | ٧٤٦ |
| ٥٤٢ | ٥٨٧ | ٦٦٧ | ٦٢٤ | ٦٢٢ |

### سؤال ١

مصنع به ٢٠٠ عامل، ويريد المسئولون إعداد المجلة الشهرية الخاصة بهذا المصنع، ولتطوير هذه المجلة فى ضوء معرفة آراء العاملين تم إعداد استبيان، يُعطى لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين. وضح **كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة.**

## ٢ العينة العشوائية الطبقية:

- **يتم اختيار العينة العشوائية الطبقية عن طريق:**

تقسيم المجتمع إلى مجموعات متجانسة، وتسمى كل مجموعة بطبقة، ثم يقوم الباحث بإحصاء عدد مفردات كل طبقة، ومن ثم اختيار العينة من كل الطبقات بحيث يتناسب تمثيل مفردات كل طبقة مع حجمها فى المجتمع.

- **ويمكن حساب عدد مفردات كل طبقة فى العينة من العلاقة الآتية:**

$$\text{عدد مفردات الطبقة فى العينة} = \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

**(مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح)**

## مثال ٢

مدرسة إعدادية بها ٣٥٠ طالبًا بالصف الأول، و٣٥٠ طالبًا بالصف الثانى، و٣٠٠ طالب بالصف الثالث، ويرغب مجلس إدارتها فى إقامة ندوة علمية لعينة من الطلبة، اختيرت عينة تتكون من ١٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة (سنة دراسية) بحسب حجمها. **احسب عدد مفردات كل طبقة.**

**الحل**

- العدد الإجمالى للطلبة = ٣٥٠ + ٣٥٠ + ٣٠٠ = ١٠٠٠ طالب
- عدد مفردات الصف الأول = $\frac{٣٥٠}{١٠٠٠} \times ١٠٠ = ٣٥$ طالبًا
- عدد مفردات الصف الثانى = $\frac{٣٥٠}{١٠٠٠} \times ١٠٠ = ٣٥$ طالبًا
- عدد مفردات الصف الثالث = $\frac{٣٠٠}{١٠٠٠} \times ١٠٠ = ٣٠$ طالبًا

## س؟ سؤال ٢

١ إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية ٦٠٠٠ طالب بالسنة الأولى، و٤٠٠٠ طالب بالسنة الثانية، و٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة، و٣٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، **فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

٢ الجدول التالى يمثل عدد الطلاب فى إحدى الكليات الجامعية:

| الفرقة | الأولى | الثانية | الثالثة | الرابعة |
|---|---|---|---|---|
| عدد الطلاب | ٩٠٠ | ٨٠٠ | ٧٠٠ | ٦٠٠ |

إذا أردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٢٠ طالبًا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، **فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**



أسئلة تفاعلية

تدرّب الدرس

# جمـــع البيانـــات

▲تذكر ▲فهم ▲تطبيق ▲تحليل

## تدريبات الأضـــواء

### أولًا وثانيًا مصادر وأساليب جمع البيانات:

**١ أكمل ما يأتى:**

١ العينة الإحصائية هى جزء ................

٢ من أساليب جمع البيانات ................ ، ................ .

٣ تنقسم مصادر جمع البيانات إلى مصادر ................ ومصادر ................

٤ ................ هى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر.

٥ ................ هى المصادر التى نحصل منها على البيانات من أجهزة أو هيئات رسمية.

٦ يتميز أسلوب العينات بتوفير ................ و ................ و ................

٧ الأسلوب الأنسب لفحص دم مريض هو ................

٨ الأسلوب الأنسب لحصر التعداد العام للسكان هو ................

**٢ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ من المصادر الثانوية لجمع البيانات ................ . (الفيوم ٢٠١٢)

(أ) المقابلة الشخصية (ب) الاستبيانات

(جـ) قاعدة بيانات الموظفين (د) الملاحظة والقياس

٢ استطلاع الرأى يعتبر من المصادر ................

(أ) الثانوية (ب) الأولية (جـ) التاريخية (د) الطبقية

٣ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى يُسمى بالعينة ................ (البحيرة ٢٠١٧)

(أ) العشوائية (ب) الطبقية (جـ) العمدية (د) العنقودية

٤ مصنع به ١٢٥ عاملًا، وهم: ٧٥ فنيًا، ٥٠ مهندسًا، فإذا أُخذت عينة طبقية حجمها ٥٠ فردًا تُمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فإن عدد المهندسين يساوى ................ مهندسًا. (المنوفية ٢٠١٦)

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

٣ مدرسة بها ٢٠٠ طالب و ٤٠٠ طالبة، أرادت عمل استطلاع رأى لعينة عددها ١٢ طالبًا وطالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها . احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

العدد الإجمالى للطلبة والطالبات = ............ + ............ = ............

عدد مفردات الطلبة فى العينة = $\frac{......}{......}$ × ............ = ............

عدد مفردات الطالبات فى العينة = $\frac{......}{......}$ × ............ = ............

٤ اشرح بإيجاز العينة العشوائية الطبقية، مبينًا كيف يتم اختيارها.

٥ الجدول التالى يوضح عدد الطلاب فى إحدى المدارس الإعدادية فى الصفوف الثلاثة.

| الصف | الأول | الثانى | الثالث |
|---|---|---|---|
| عدد الطلاب | ٥٠٠ | ٧٠٠ | ٣٠٠ |

إذا أردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٥٠ طالبًا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها.

فاحسب عدد كل طبقة فى العينة.




٦ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة ومقسم إلى ثلاث طبقات بياناتها كالتالى:

| رقم الطبقة | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| عدد مفردات الطبقة | ١٢٠٠٠ | ٢٠٠٠٠ | ٨٠٠٠ |

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة ٢٤٠ مفردة ، فأوجد حجم العينة كلها.

٧ اذكر الأسلوب المناسب «الحصر الشامل أم العينات» لجميع البيانات فى كل من المجتمعات الإحصائية التالية:

( ا ) مستوى تحصيل فصل دراسى مكون من ٣٠ طالبًا.

(ب) نسبة وجود الغاز بأحد المواقع الاستكشافية.

(جـ) مدى صلاحية مياه الآبار للشرب.

( د ) مدى انتشار مرض ما فى قرية.

٨ مصنع لإنتاج التليفزيونات ينتج ثلاثة موديلات، وتعدادها كالتالى ٦٠٠ من الموديل الأول، ٨٠٠ من الموديل الثانى، ٩٠٠ من الموديل الثالث، فإذا أراد مدير المصنع أخذ عينة عشوائية تقدر بـ ١٠٪ من الإجمالى ويمثل فيها كل موديل حسب حجم إنتاجه، **فحدد عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

## تدريبات الكتاب المدرسى

١ **قارن** بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مبينًا مزايا وعيوب كل منهما.

---

٢ ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بها فى مستوى الخدمة لهم، فقامت بإعطاء كل نزيل رقمًا من ٢٠١ إلى ٥٠٠، واختيار ١٠٪ منهم عينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة. **حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة.**

---

٣ إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى، و٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية، و٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة، و١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، **فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ من المصادر الأولية لجمع البيانات .............. .

( ا ) وسائل الإعلام (ب) مواقع الإنترنت

(جـ) الاستبيانات ( د ) قاعدة بيانات الموظفين

٢ الأسلوب المناسب لفحص نسبة الأملاح لمياه إحدى الآبار هو .............. .

( ا ) الحصر الشامل (ب) العينات (جـ) الاستبيانات ( د ) المقابلة الشخصية

٣ مصنع به ٦٠٠ عامل، و ١٠٠٠ عاملة، أراد عمل استبيان على عينة عددها ٤٨ عاملًا وعاملة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، فإن عدد مفردات طبقة العمال يساوى .............. .

( ا ) ٣٠ (ب) ١٨ (جـ) ٢٤ ( د ) ٢٠

٤ من مميزات أسلوب الحصر الشامل .............. .

( ا ) التمييز (ب) عدم الشمول

(جـ) التمثيل لجزء من مفردات المجتمع الإحصائى. ( د ) الدقة

٥ إذا كان المنوال للقيم ٥ ، ٣ ، س - ١ ، ٧ هو ٣ فإن س = .............. .

( ا ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ ( د ) ١٠

٦ الوسط الحسابى للقيم ٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ٦ هو .............. . (الغربية ٢٠١٨)

( ا ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٧ ( د ) ١٠

## ٢ أجب عما يأتى:

١ مدرسة بها ٧٢٠ طالبًا، و ٤٨٠ طالبة، أرادت عمل استبيان على عينة قوامها ٤٠ طالبًا وطالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها. **احسب** عدد مفردات كل طبقة.

٢ **يراد** سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ١٠٠٠٠ مفردة ومقسمة إلى طبقتين بياناتها كالآتى:

| الطبقة | الأولى | الثانية |
|---|---|---|
| عدد مفردات الطبقة | ٣٠٠٠ | ٧٠٠٠ |

فإذا كان عدد المفردات التى تمثل طبقة العينة الأولى ٩٠ مفردة، **فأوجد** عدد المفردات الكلية التى تمثل العينة.




ذاكر الدرس ٢

# التشتـــت

فكر وناقش:

- سبـق لك دراسـة مقاييس النزعة المركزية، وهى: الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال.

١ **الوسط الحسابى** = $\frac{\text{مجموع قيـم المفردات}}{\text{عـدد هذه المفردات}}$

**فمثلًا:** الوسط الحسابى لمجموعة القيم: ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٤

$= \frac{١٧ + ١٨ + ١٩ + ٢٢ + ٢٤}{٥} = ٢٠$

٢ **الوسيط لمجموعة من القيم:** هو القيمة التى تتوسط هذه المجموعة بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

**فمثلًا:** الوسيط للقيـم : ٦٠ ، ٥٨ ، ٦٢ ، ٦١ ، ٥٩ هو **٦٠**

٣ **المنوال:** هو القيمة الأكثر شيوعًا (تكرارًا).

**فمثلًا:** المنوال لمجموعة القيـم: ١٧ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٨ ، ٢٣ ، ٢٤ هو **١٨**

- فى بعض الحالات لا يكون كافيًا استخدام مقاييس النزعة المركزية وحدها لإعطاء وصف واضح للبيانات.

**فمثلًا:** إذا كان لدينا مجموعتان ٩ ، ب من البيانات:

مجموعة ٩ : ١٧٠ ، ١٨٠ ، ١٨٠ ، ٢٣٠ ، ٢٤٠

مجموعة ب: ٥٠ ، ١٨٠ ، ١٨٠ ، ١٩٠ ، ٤٠٠

فإن:

| | الوسط الحسابى | الوسيـط | المنوال |
|---|---|---|---|
| مجموعة ٩ | ٢٠٠ | ١٨٠ | ١٨٠ |
| مجموعة ب | ٢٠٠ | ١٨٠ | ١٨٠ |

- **نلاحظ من الجدول السابق: أن المجموعتين لهما نفس (الوسط الحسابى ، الوسيط ، المنوال)** بالرغم من ذلك نلاحظ أن بيانات المجموعة ٩ متقاربة وبيانات المجموعة ب متباعدة.
- وبالتالى، فإن هذه المقاييس لا تكفى وحدها للمقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات، ولهذا يجب مراعاة تشتت قيم بيانات كل من المجموعتين وتباعدهما عن بعضهما.

## التشتـــت:

- يقصد به التباعـد أو الاختـلاف بين مفردات مجموعة من القيم:




| | | |
|---|---|---|
| إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلًا. | إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرًا. | إذا تساوت جميع المفردات. |

**تعريـف**

**التشـتت:** هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

## مقاييـس التشـتت: المدى ، الانحراف المعيارى.

### ١ المـدى:

- هو الفرق بين قيمة أكبر مفردة وقيمة أصغر مفردة فى هذه المجموعة.

**المدى = قيمة أكبـر مفردة − قيمة أصغـر مفردة**

**فمثلًا:** • إذا كانت قيم المجموعة سـ هى: ٦٠ ، ٥٨ ، ٦٢ ، ٥٩ ، ٦١ فإن المدى = ٦٢ − ٥٨ = ٤

• إذا كانت قيم المجموعة صـ هى: ٧٢ ، ٧٨ ، ٤٦ ، ٦٥ ، ٣٩ فإن المدى = ٧٨ − ٣٩ = ٣٩

- ولذلك يقال إن المجموعة صـ أكثـر تشتتًا من المجموعة سـ

| | |
|---|---|
| **مميـزات المدى** | • أبسط وأسهل مقاييس التشتت.<br>• يعطى فكرة سريعة عن تباعد وتقارب المفردات. |
| **عيـوب المدى** | • يتأثر تأثيرًا كبيرًا بالقيم المتطرفة، لذلك لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.<br>(حيث لا يعتمد فى حسابه إلا على أكبر قيمة وأصغر قيمة مع إهمال باقى القيم) |

## مثال ١

احسب المدى لكل مما يأتى من المجموعات:

١ ٥١ ، ٥٣ ، ٥٥، ٥٧ ، ٥٨ ، ٦٠ ٢ -٤ ، -٢ ، ١ ، ٠ ، -٨ ٣ ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧

**الحل**

١ المدى = ٦٠ − ٥١ = ٩ ٢ المدى = ١ − (−٨) = ٩

٣ المدى = صفر

**لاحظ أن**

إذا كانت قيم المفردات متساوية

فإن: المدى = صفر

### ٢ الانحراف المعيارى:

- هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى.
- يرمز له بالرمز $\sigma$ تقرأ (سيجما) .

### حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات:

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$

حيث:

| | | | |
|---|---|---|---|
| مجـ | تشير إلى عملية الجمع، تقرأ (مجموع). | س | تشير إلى قيمة كل مفردة من المفردات. |
| $\overline{س}$ | تشير إلى الوسط الحسابى للمفردات، تقرأ (س بار) | ن | تشير إلى عدد المفردات. |

**نقاط هامة**

- الانحراف المعيارى يتأثر بكل القيم لذلك فهو أكثر تعبيرًا من المدى عن مقدار التشتت للمجموعات.
- الانحراف المعيارى له نفس وحدة القياس المستخدمة للبيانات.
- هو أهم وأدق مقاييس التشتت وأوسعها انتشارًا.
- القيم الأقرب لبعضها تكون أقل تشتتًا، ويكون الانحراف المعيارى لها أصغر.
- إذا كان الانحراف المعيارى = صفرًا، فهذا يعنى أن كل قيم المفردات متساوية وفى حالة تجانس تام.
- يمكن أيضًا حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم من القانون: $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}س^2}{ن} - (\overline{س})^2}$

## مثال ٢

احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم: ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

### الحل

١ نوجد الوسط الحسابى للقيم ($\overline{س}$)

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٨ + ٩ + ٧ + ٦ + ٥}{٥} = ٧$$

٢ نكون الجدول المقابل:

| | س | س - $\overline{س}$ | (س - $\overline{س}$)$^٢$ | س$^٢$ |
|---|---|---|---|---|
| | ٨ | ٨ - ٧ = ١ | ١ | ٦٤ |
| | ٩ | ٩ - ٧ = ٢ | ٤ | ٨١ |
| | ٧ | ٧ - ٧ = ٠ | ٠ | ٤٩ |
| | ٦ | ٦ - ٧ = -١ | ١ | ٣٦ |
| | ٥ | ٥ - ٧ = -٢ | ٤ | ٢٥ |
| المجموع | ٣٥ | صفـــر | ١٠ | ٢٥٥ |

٣ نقوم بحساب الانحراف المعيارى بالتعويض فى القانون:

∵ الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢}{ن}}$

∴ الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} \simeq ١,٤$

**حـل آخـر:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{مجـ س^٢}{ن} - (\overline{س})^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٥٥}{٥} - (٧)^٢} = \sqrt{٢} \simeq ١,٤$$

## مثال ٣

إذا كانت ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١ تمثل درجات أحد التلاميذ فى اختبار الرياضيات فى خمسة شهور مختلفة،

فأوجـد: ١ الوسط الحسابى ٢ الانحراف المعيارى

### الحل

١ نوجد الوسط الحسابى ($\overline{س}$) حيث

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٦ + ١٨ + ٢١}{٥} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$$

٢ نكون الجدول المقابل:

| | س | س - $\overline{س}$ | (س - $\overline{س}$)$^٢$ |
|---|---|---|---|
| | ١٢ | ١٢ - ١٦ = -٤ | ١٦ |
| | ١٣ | ١٣ - ١٦ = -٣ | ٩ |
| | ١٦ | ١٦ - ١٦ = ٠ | ٠ |
| | ١٨ | ١٨ - ١٦ = ٢ | ٤ |
| | ٢١ | ٢١ - ١٦ = ٥ | ٢٥ |
| المجموع | ٨٠ | صفـــر | ٥٤ |

∵ الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢}{ن}}$

∴ $\sigma = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} = \sqrt{١٠,٨} \simeq ٣,٢٩$

**س؟ سؤال ١**

احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية: ٥٤ ، ٦٠ ، ٦٢ ، ٧١ ، ٧٣

## حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى:

١ **الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى (بسيط) :** $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ} ك}}$

**حيث: (س) هى القيمة ، (ك) هى تكرار القيمة**

## مثال ٤

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة:

| عدد (الوحدات التالفة) | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد (الصناديق) | ٣ | ١٦ | ١٧ | ٢٥ | ٢٠ | ١٩ |

**أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة.**

**الحل**

| س | ك | س × ك | $س - \overline{س}$ | $(س - \overline{س})^2$ | $(س - \overline{س})^2 \times ك$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٣ | ٠ | ٣- | ٩ | ٢٧ |
| ١ | ١٦ | ١٦ | ٢- | ٤ | ٦٤ |
| ٢ | ١٧ | ٣٤ | ١- | ١ | ١٧ |
| ٣ | ٢٥ | ٧٥ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٤ | ٢٠ | ٨٠ | ١ | ١ | ٢٠ |
| ٥ | ١٩ | ٩٥ | ٢ | ٤ | ٧٦ |
| المجموع | ١٠٠ | ٣٠٠ | | | ٢٠٤ |

- الوسط الحسابى $(\overline{س}) = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ} ك} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

- الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ} ك}} = \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٥١}}{٥} \simeq ١,٤٢٨$

٢ الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى (ذى مجموعات) : $\overline{س} = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك}$

حيث: (س) هى مركز المجموعة ، (ك) هى تكـرار المجموعة

## مثـال ٥

التوزيـع التكرارى الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذًا فى أحـد الاختبارات لإحدى المواد:

| المجموعـات | ٠ – | ٤ – | ٨ – | ١٢ – | ١٦ – ٢٠ | المجمـوع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكـرار | ٢ | ٥ | ٨ | ١٥ | ١٠ | ٤٠ |

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع.

**لاحظ أن**
مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$

**الحـل**

| المجموعات | التكرار ك | مراكز المجموعات (س) | س × ك | س – $\overline{س}$ | $(س - \overline{س})^٢$ | $(س - \overline{س})^٢ \times ك$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠ – | ٢ | $\frac{٠ + ٤}{٢} = ٢$ | ٤ | ١٠,٦– | ١١٢,٣٦ | ٢٢٤,٧٢ |
| ٤ – | ٥ | $\frac{٤ + ٨}{٢} = ٦$ | ٣٠ | ٦,٦– | ٤٣,٥٦ | ٢١٧,٨٠ |
| ٨ – | ٨ | $\frac{٨ + ١٢}{٢} = ١٠$ | ٨٠ | ٢,٦– | ٦,٧٦ | ٥٤,٠٨ |
| ١٢ – | ١٥ | $\frac{١٢ + ١٦}{٢} = ١٤$ | ٢١٠ | ١,٤ | ١,٩٦ | ٢٩,٤ |
| ١٦ – ٢٠ | ١٠ | $\frac{١٦ + ٢٠}{٢} = ١٨$ | ١٨٠ | ٥,٤ | ٢٩,١٦ | ٢٩١,٦ |
| المجمـوع | ٤٠ | | ٥٠٤ | | | ٨١٧,٦ |

- الوسط الحسابى $(\overline{س}) = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك} = \frac{٥٠٤}{٤٠} = ١٢,٦$

- الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢ \times ك}{مجـ ك}} = \sqrt{\frac{٨١٧,٦}{٤٠}} = \frac{\sqrt{٥١١}}{٥} \simeq ٤,٥٢١$ درجة

## إيجاد الانحراف المعيارى بواسطة حاسبة الجيب:



• يمكن استخدام الآلة الحاسبة CASIO: [Fx-82ES, Fx-85ES, Fx-500ES, Fx 991 Es plus] فى حساب الانحراف المعيارى:

• **والخطوات التالية توضح كيفية حل المثال السابق (مثال ٤):**

(١) تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائى والاستعداد لإدخال البيانات بضغط المفاتيح (الأزرار) التالية من اليسار

**Shift Mode ▼ 4 (STAT) 1 (on)**

**ملحوظة:**

إذا كان الانحراف المعيارى مطلوبًا لمجموعة من القيم نستخدم نفس الخطوة، ولكن (off) **2** بدل (on) **1**




ثم نضغط على المفاتيح: **Mode 3 (STAT) 1 (1-VAR)**

فتظهر الشاشة على الشكل:

(٢) نُدخل مراكز المجموعات س: ٢، ٦، ١٠، ١٤، ١٨

(أو قيم س لمجموعة من القيم)




بالضغط على المفاتيح من اليسار إلى اليمين كما يلى:

ابدأ **2 = 6 = 1 0 = 1 4 = 1 8 =**

(٣) نصعد بالمؤشر إلى بداية العمود الثانى (FREQ)




وذلك بالضغط على المفاتيح من اليسار إلى اليمين ◄ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲

ثم نُدخل التكرار المناظر لكل مجموعة ٢، ٥، ٨، ١٥، ١٠

ابدأ **2 = 5 = 8 = 15 = 10 = AC**

(٤) لإيجاد قيمة الانحراف المعيارى، نقوم بالضغط على الأزرار التالية من اليسار إلى اليمين




ابدأ **Shift 1 4 (VAR) 3** ($\sigma X_n$) **= ▲**

فيكون $\sigma$ ≃ ٤٫٥٢١

## س؟ سؤال ٢

❶ الجدول التكرارى التالى يبين درجات امتحان ما سُجلت فى أحد الشهور.

أوجد الانحراف المعيارى للدرجات. (أسوان ٢٠٢٠)

| عدد الأطفال | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأسر | ٣ | ٤ | ٦ | ٩ | ٥ | ٣ | ٤ |

❷ الجدول التكرارى التالى يبين توزيع الأجر اليومى لـ ٢٠ شخصًا بالجنيه،

أوجد الانحراف المعيارى للأجور.

| الأجر | ٢٠ | ٢٥ | ٣٠ | ٣٥ | ٤٠ | ٤٥ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأشخاص | ٢ | ٣ | ٥ | ٥ | ١ | ٤ | ٢٠ |

❸ احسب الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى: (الغربية ٢٠١٧)

| المجموعات | ٠- | ٤- | ٨- | ١٢- | ١٦-٢٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٤ | ٧ | ٢ | ٩ | ٢٥ |

❹ أوجد الانحراف المعيارى لعدد الأطفال.

| المجموعات | ٠- | ١٠- | ٢٠- | ٣٠- | ٤٠-٥٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٥ | ١١ | ١٥ | ٧ | ٤٠ |

ثم أوجد الانحراف المعيارى باستخدام الآلة الحاسبة.



## تدريبات الأضــواء

### أولًا وثانيًا المدى والانحراف المعيارى:

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ................ (شمال سيناء ٢٠٢٤)

( ا ) الوسط الحسابى (ب) المدى
(جـ) الوسيط ( د ) الانحراف المعيارى

٢ أبسط وأسهل مقياس للتشتت هو ................ (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

( ا ) الوسط الحسابى (ب) الوسيط (جـ) المدى ( د ) المنوال

٣ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....... (الفيوم ٢٠١٩)

( ا ) الوسيط (ب) المنوال (جـ) الانحراف المعيارى ( د ) الوسط الحسابى

٤ من مقاييس التشتت ................ (المنيا ٢٠٢٤)

( ا ) المدى (ب) الوسط الحسابى (جـ) المنوال ( د ) الوسيط

٥ القيمة الأكثر تكرارًا لمجموعة من البيانات هى ................ (المنوفية ٢٠١٨)

( ا ) الوسيط (ب) المدى (جـ) المنوال ( د ) الوسط الحسابى

٦ $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه القيم}}$ = ................ (السويس ٢٠١٩)

( ا ) المدى (ب) الانحراف المعيارى (جـ) الوسط الحسابى ( د ) المنوال

٧ أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها هو ................ (دمياط ٢٠١٩)

( ا ) الوسيط (ب) الوسط الحسابى
(جـ) المدى ( د ) الانحراف المعيارى

٨ المدى لمجموعة القيم: ٥ ، ٩ ، ٨ ، ١٣ ، ١١ يساوى ................ (الشرقية ٢٠٢٢)

( ا ) ١٣ (ب) ١٨ (جـ) ١١ ( د ) ٨

٩ المدى لمجموعة القيم: ١٧ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ١٥ يساوى ..........

(أ) ١٣ (ب) ٦ (جـ) ٣٢ (د) ١٩

١٠ الوسط الحسابى لمجموعة القيم: ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ يساوى .............. (القاهرة ٢٠١٨)

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢٥ (د) ٥

١١ الوسط الحسابى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى ......... (الإسكندرية ٢٠١٧)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

١٢ إذا كانت جميع قيم المفردات متساوية فى القيمة فإن ................. (الوادى الجديد ٢٠٢٤)

(أ) $\overline{س} = ٠$ (ب) $\sigma = ٠$ (جـ) $(س - \overline{س}) > ٠$ (د) $(س - \overline{س}) < ٠$

١٣ الانحراف المعيارى لمجموعة القيم ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ يساوى ................. (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٦

١٤ إذا كان مجـ $(س - \overline{س})^٢ = ٣٦$ لمجموعة من القيم عددها يساوى ٩ فإن $\sigma$ = ......... (أزهر الغربية ٢٠٢٥)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

١٥ إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم يساوى ٣ وعدد هذه القيم ٢ فإن مجـ $(س - \overline{س})^٢$ = .....

(أ) ١ (ب) ١٨ (جـ) ١٢ (د) ٢٤ (الشرقية ٢٠٢٤)

١٦ إذا كانت ٦٧ هى أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى يساوى ٢٧ فإن أصغر مفردات هذه المجموعة هو ................ (المنيا ٢٠١٦)

(أ) ٦٧ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٧ (د) ٩٤

١٧ إذا كان مدى القيم : ٧ ، ك ، ٨ ، ٩ ، ٥ هو ٦ فإن ك = ................. (المنوفية ٢٠٢٤)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

١٨ أى من القيم الآتية للعدد س تجعل مدى مجموعة القيم س، ١٥، ٢٠، ٢٤ يساوى ١٤ ؟ ............

(أ) ٣٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٩ (د) ١٠ (المنوفية ٢٠٢٠)

١٩ إذا كان المدى للقيم ٦ + ك ، ٦ - ك ، ٦ + ٥ك ، ٦ - ٢ ك هو ١٤ حيث ك ∈ ط فإن ك = ...........

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢٠ إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم الآتية ١٢ ، ١٧ ، ١٩ ، س ، ١٤ هو ١٥ فإن قيمة س تساوى ............. (شمال سيناء ٢٠١٣)

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٥

٢١ إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم الآتية: ٣ك - ٤، ٣ك - ٢ ، ٢ك + ٢، ٢ك + ٤، ٢ ك + ٥
هو ١٣ فإن ك = ..............

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ١٥

٢٢ إذا كان: ٢ س + ٢ ص = ١٠ ، س ∈ ع$_+$ ، ص ∈ ع$_+$
فإن: الوسط الحسابى بين س ، ص يساوى .................. (السويس ٢٠١٦)

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ٥ (د) ٢

٢٣ إذا كان الانحراف المعيارى للقيم س + ٢ ، ٥ ، ص - ٢ يساوى صفرًا فإن س + ص = ..................

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٤ (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

٢٤ إذا كان مجموع مربعات انحرافات ٨ قيم عن وسطها الحسابى يساوى ٧٢ فإن الانحراف المعيارى لهذه القيم يساوى ..............

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٣

٢٥ إذا كان الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^٢}{ن} - (\bar{\text{س}})^٢}$ لخمس مفردات موجبة هو $\sqrt{٢}$
وكان مجـ س$^٢$ = ٢٥٥ فإن $\bar{\text{س}}$ = ..............

(أ) ٥١ (ب) ٤٩ (جـ) ١٤ (د) ٧

٢٦ إذا كان الوسط الحسابى للقيم ٢ ، ٥ ، ك هو ٥ حيث ك ∈ ع فإن $\sigma$ = ..................

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) $\sqrt{٦}$

---

٢ احسب المدى لكل من المجموعتين:

(أ) ٥١ ، ١٠٠ ، ٧٩ ، ٩٠ ، ١٢٠ (ب) ٣٢ ، ١٥٠ ، ٥٤ ، ١٣ ، ٤٧

ثم بيِّن: أيهما أكثر تشتتًا؟ (فسر ذلك).

---

٣ احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية:

(أ) ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ (المنوفية ٢٠٢٤)

(ب) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ (الجيزة ٢٠٢٤)

(جـ) ١٣ ، ١٤ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٢ (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية) (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(د) ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١ (لأقرب رقم عشرى) (الأزهر الشريف ٢٠٢٤)

٤ الجدول التكرارى التالى يبين عدد أيام غياب الطلاب فى أحد الفصول: (أسيوط ٢٠٢٤)

| عدد أيام الغياب | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الطلاب | ٥ | ٧ | ٧ | ٥ | ٦ | ٣٠ |

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لأيام الغياب.

٥ فيما يلى توزيع تكرارى يبين أعمار ١٠ أطفال: (سوهاج ٢٠٢٤)

| العمر بالسنوات | ٥ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١٢ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأطفال | ١ | ٢ | ٣ | ٣ | ١ | ١٠ |

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات.

٦ التوزيع التكرارى التالى يوضح عدد الأهداف التى سُجلت فى عدد من مباريات كرة القدم:

| عدد الأهداف | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد المباريات | ١ | ١٠ | ٦ | ٩ | ٥ | ٣ | ٢ |

( ا ) احسب الوسط الحسابى.

(ب) أوجد الانحراف المعيارى لعدد الأهداف.

٧ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات الآتية: (السويس ٢٠١٦)

| المجموعات | صفر- | ١٠- | ٢٠- | ٣٠- | ٤٠-٥٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٣ | ١٨ | ٧ | ١٠ | ٤٠ |

٨ أوجد الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى: (كفر الشيخ ٢٠١٣)

| المجموعات | صفر- | ٤- | ٨- | ١٢- | ١٦- | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٥ | ١٠ | ١٥ | ١٠ | ٥ | ٤٥ |

٩ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى: (الدقهلية ٢٠١٣)

| المجموعات | ٥ - | ١٥ - | ٢٥ - | ٣٥- | ٤٥ - ٥٥ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٤ | ٧ | ٤ | ٢ | ٢٠ |

**١٠** أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات التالية: (القليوبية ٢٠٢٠)

| الفئــــة | صفر - | ٢ - | ٤ - | ٦ - | ٨ - ١٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكــرار | ١ | ٣ | ٦ | ٥ | ٥ | ٢٠ |

**١١** التوزيع التكرارى التالى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات:

| عدد الكيلو مترات لكل لتر | ٥ - | ٧ - | ٩ - | ١١ - | ١٣ - | ١٥ - ١٧ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عـدد السيـــارات | ٣ | ٦ | ١٠ | ١٢ | ٥ | ٤ | ٤٠ |

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلو مترات لكل لتر.

تفكير إبداعى TIMSS

**١٢** إذا كانت المصاريف اليومية بعشرات الجنيهات لعينتين من الأسـر فى مدينتين متجاورتين كما يلى:

**العينة الأولى:** ٢٤، ٢٠، ٢٦، ٢٥، ٣٠، ١٨، ٣٢ **العينة الثانية:** ٢٧، ٢٥، ٢٥، ٢٣، ٢٤، ٢٦

**فحدد مع ذكر السبب:** أىّ العينتين السابقتين أكثر تشتتًا؟

**١٣** إذا كانت بيانات عدد من الأفراد فى ٥٠ أسـرة كما يلى:

| عـدد الأفـراد | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عـدد الأسـر | ٥ | ٧ | ٨ | ١٢ | ٩ | ٥ | ٤ |

**فأوجد** الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد أفراد الأسـر.

**١٤** الجدول التالى يمثل عينة من منشأة صحية حسب عدد الأطباء فيها:

| عـدد الأطبـاء | ١٠ - | ١٥ - | ٢٠ - | ٢٥ - | ٣٠ - | ٣٥ - | ٤٠ - | ٤٥ - ٥٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد المنشآت الصحية | ٤ | ٤ | ٦ | ١٠ | ٦ | ٥ | ٤ | ١ |

**أوجد الانحراف المعيارى.**

**١٥** إذا كانت كل من القيم الآتية:

(أ) ٧٣، ٥٤، ٦٢، ٧١، ٦٠ (ب) ١٣، ١٤، ١٧، ١٩، ٢٢

تمثـل درجات مجموعتيــن من التلاميذ فى اختبار مادة ما، **فاحسـب** الوسـط الحســابى والانحراف المعيارى لكل مجموعة، **ثم حـــدد:** أى المجموعتين أكثر تجانسًـا فى مستوى تحصيلها من الأخرى.

## تدريبات الكتاب المدرسى

١ احسب الانحراف المعيارى لكلٍّ من البيانات التالية: (الأقصر ٢٠٢٢)

( ا ) ١٦، ٣٢، ٥، ٢٠، ٢٧ (ب) ٧٢، ٥٣، ٦١، ٧٠، ٥٩

(جـ) ١٥، −١٢، −٩، ٢٧، −٦ ( د ) ٢٢، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ١٨

٢ إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات = صفر، فماذا تستنتج؟

٣ التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة:

| عدد الأطفال | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأسر | ٨ | ١٦ | ٥٠ | ٢٠ | ٦ |

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال. (مطروح ٢٠١٩)

٤ التوزيع التكرارى التالى يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ فى إحدى المدارس:

| الوزن (بالكيلو جرام) | ٣٥− | ٤٥− | ٥٥− | ٦٥− | ٧٥−٨٥ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد التلاميذ | ٢٠ | ٥٥ | ٨٠ | ٣٠ | ١٥ | ٢٠٠ |

أوجد :

( ا ) الوسط الحسابى لأوزان التلاميذ. (ب) الانحراف المعيارى لأوزان التلاميذ.

٥ الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين أ ، ب فى الصف الثالث الإعدادى فى أحد الاختبارات:

فصل ( ا )

| مجموعات الدرجات | صفر− | ١٠− | ٢٠− | ٣٠− | ٤٠−٥٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد التلاميذ | ٢ | ٥ | ١١ | ١٥ | ٧ | ٤٠ |

فصل (ب)

| مجموعات الدرجات | صفر− | ١٠− | ٢٠− | ٣٠− | ٤٠−٥٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد التلاميذ | ٢ | ٣ | ١٨ | ٧ | ١٠ | ٤٠ |

١ أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من التوزيعين التكراريين.

٢ أى الفصلين أكثر تجانسًا فى مستوى التحصيل؟

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٥ ، ٩ هو ............... (أزهر الإسماعيلية ٢٠٢٥)

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ١٢

٢ إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم أ ، ٥ ، ٣ ، ٧ يساوى ٦، فإن أ = ............ (كفر الشيخ ٢٠١٨)

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٣

٣ أحد مقاييس النزعة المركزية هو ............... (دمياط ٢٠١٨)

(أ) الانحراف المعيارى (ب) المدى

(جـ) الوسط الحسابى (د) التباين

٤ إذا كانت جميع المفردات متساوية فى القيمة فإن ............... (سوهاج ٢٠٢٤)

(أ) $س - \overline{س} >$ صفر (ب) $س - \overline{س} =$ صفر

(جـ) $\sigma =$ صفر (د) $\overline{س} =$ صفر

٥ إذا كان: مجـ $(س - \overline{س})^{٢} = ٤٨$ لمجموعة من القيم عددها ١٢ فإن $\sigma =$ ............... (أسوان ٢٠٢٠)

(أ) ‎-٢ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٦

٦ إذا كان الانحراف المعيارى للقيم س + ٢ ، ٧ ، ص - ١ يساوى صفرًا فإن س + ص = ............ (أسيوط ٢٠٢٢)

(أ) ١٤ (ب) ١٩ (جـ) ١٥ (د) ١٣

---

## ٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ احسب كلًّا من الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم: ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٠ ، ٦ (الغربية ٢٠٢٤)
(مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

٢ الجدول الآتى يبين الأعمار بالسنوات لـ ٢٠ شخصًا: (المنوفية ٢٠١٨)

| العمـر | ١٥ | ٢٠ | ٢٢ | ٢٣ | ٢٥ | ٣٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأشخاص | ٢ | ٣ | ٥ | ٥ | ١ | ٤ | ٢٠ |

أوجد الانحراف المعيارى للأعمار مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ الجذر التربيعى لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ............

(أ) الوسيط (ب) المنوال

(جـ) الانحراف المعيارى (د) الوسط الحسابى

٢ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى يسمى بالعينة ............

(أ) العشوائية (ب) الطبقية (جـ) العمدية (د) العنقودية

٣ الدرجة الأكثر تكرارًا لمجموعة من البيانات هى ............

(أ) الوسيط (ب) المنوال (جـ) المدى (د) المتوسط الحسابى

٤ المدى لمجموعة القيم ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٧ ، ٢٠ هو ............ (الأزهر الشريف ٢٠٢٤)

(أ) ٢٧ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ١٣

٥ الطريقة الوحيدة المستخدمة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة هى ............

(أ) أسلوب الحصر الشامل (ب) أسلوب العينات

(جـ) أسلوب الاختيار المتحيز (د) أسلوب الاستبيان

٦ $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$ = ............

(أ) المدى (ب) الانحراف المعيارى

(جـ) المنوال (د) الوسط الحسابى

٧ إذا كان الانحراف المعيارى للقيم: س + ١ ، ص ، ٤ يساوى الصفر فإن س ص = ............ (قنا ٢٠٢٤)

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٨ إذا كان سـ = {٧} ، صـ = {٥} فإن سـ × صـ = ............ (أزهر الغربية ٢٠٢٥)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) {(٧ ، ٥)}

٩ إذا كان: مجـ $(س - \overline{س})^2$ = ٧٥ لمجموعة من القيم عددها ٣ فإن σ = ..............

(أ) ٢٥  (ب) -٥  (جـ) ٥  (د) ١٥

---

## ٢ أجب عما يأتى:

١ مجتمع به ٢٠٠٠ مفردة مقسمة إلى ٤ طبقات يراد سحب عينة تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها فقام الباحث بتصميم الجدول التالى:

| رقم الطبقة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| حجم الطبقة فى المجتمع | ٤٠٠ | ٨٥٠ | ........ | ٥٠٠ | ٢٠٠٠ |
| العدد الذى يمثل كل طبقة فى العينة | ........ | ........ | ٥ | ........ | ........ |

أكمل هذا الجدول.

٢ احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية: (البحيرة ٢٠٢٤)

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

٣ احسب الانحراف المعيارى للتوزيع الآتى: (الأقصر ٢٠٢٤)

| عدد ساعات المذاكرة | ٣ | ٥ | ٧ | ٩ | ١١ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الطلاب | ٣ | ١٢ | ٢١ | ١٠ | ٤ | ٥٠ |

٤ من الجدول التكرارى التالى:

| مجموع التلاميذ | ٠ - | ١٠ - | ٢٠ - | ٣٠ - | ٤٠ - ٥٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد التلاميذ | ٢ | ٣ | ١٨ | ٧ | ١٠ | ٤٠ |

أوجد: الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهذه البيانات.

**١** اشرح بإيجاز العينة العشوائية البسيطة، كيف يتم اختيارها؟

**٢** احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية:

(أ) ٦٥، ٦١، ٧٠، ٦٤، ٧٠، ٧٦، ٧٠     (ب) ٣٩، ٨٥، ٤٦، ٩١، ٨٨، ٥٠، ٧٧

أى المجموعتين أ، ب أكثر تجانسًا؟

**٣** للتوزيع التكرارى التالى احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى:

| المجموعات | صفر - | ٤ - | ٨ - | ١٢ - | ١٦ - ٢٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٤ | ٧ | ٢ | ٩ | ٢٥ |

**٤** قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠، ثم اختيار عينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من:

(أ) مشروبات ساخنة     (ب) وجبات خفيفة     (جـ) مثلجات

حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.

## ثانيًا: حساب المثلثات والهندسة التحليلية




الوحدة الرابعة

# حساب المثلثات

**أهداف دروس الوحدة** ◀ **بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:**

### الدرس الأول: النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

- يتعرف القياس الستينى للزوايا.
- النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

### الدرس الثانى: النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا.

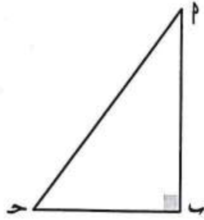
- النسب المثلثية لبعض الزوايا الحادة الخاصة (٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°).
- يستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية الأساسية.




ذاكر الدرس

# النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

**فكر وناقش** في الشكل المقابل:




إذا كان: المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

فــإن: ١ $\frac{أب}{أجـ} < ١$ ، $\frac{ب جـ}{أجـ} < ١$

٢ $\frac{أب}{أجـ} + \frac{ب جـ}{أجـ} > ١$ ، $\frac{(أب)^٢}{(أجـ)^٢} + \frac{(ب جـ)^٢}{(أجـ)^٢} = ١$

## أولًا القياس الستيني للزاوية:

الدرجة ويرمز لها بـ (١°) وتعرف بأنها قياس الزاوية المركزية التي يقابلها قوس من دائرة يساوي $\frac{١}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة

- إذا قسمت الدرجة إلى ٦٠ **جزءًا متساويًا** فإن كل جزء يسمى دقيقة ويرمز له بـ (١′)
- وكذلك إذا قسمت الدقيقة إلى ٦٠ **جزءًا متساويًا** فإن كل جزء يسمى ثانية ويرمز له بـ (١″)

∴ ١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″ ، ١° = ٣٦٠٠″

## مثـال ١

١ اكتب ٣٦″ ٩′ ٣٥° على صورة درجات فقط. ٢ اكتب ٧٢,١٨° على صورة درجات ودقائق وثوانٍ.

**الحـل**

١ نحول الثواني إلى درجات ⟸ ٣٦″ = $\frac{٣٦}{٣٦٠٠}$ = ٠,٠١°

نحول الدقائق إلى درجات ⟸ ٩′ = $\frac{٩}{٦٠}$ = ٠,١٥°

وتكون: ٣٦″ ٩′ ٣٥° = ٣٥° + ٠,١٥° + ٠,٠١° = ٣٥,١٦°

ويمكن التحويل باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي: °′″ = °′″ 6 3 °′″ 9 °′″ 5 3

فيكون الناتج: ٣٥,١٦°

٢ نحول ٠,١٨° إلى دقائق بالضرب ×٦٠ ⟸ ٠,١٨° = ٠,١٨° × ٦٠ = ١٠,٨′

نحول ٠,٨′ إلى ثوانٍ بالضرب ×٦٠ ⟸ ٠,٨′ = ٠,٨′ × ٦٠ = ٤٨″

أي أن: ٧٢,١٨° = ٤٨″ ١٠′ ٧٢°

ويمكن التحويل باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي: °′″ = 8 1 . 2 7

فيكون الناتج: ٤٨″ ١٠′ ٧٢°

## مثـال ٢

**إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث ٣ : ٥ : ٨ فأوجد القياس الستينى لكل منها.**

**الحـل**

| قياس الزاوية الأولى | : | قياس الزاوية الثانية | : | قياس الزاوية الثالثة | : | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣ | : | ٥ | : | ٨ | : | ١٦ |
| ؟ | : | ؟ | : | ؟ | : | °١٨٠ |

قياس الزاوية الأولى $= \frac{٣ \times °١٨٠}{١٦} = °٣٣,٧٥ = °٣٣ \; ′٤٥$

قياس الزاوية الثانية $= \frac{٥ \times °١٨٠}{١٦} = °٥٦,٢٥ = °٥٦ \; ′١٥$

قياس الزاوية الثالثة $= \frac{٨ \times °١٨٠}{١٦} = °٩٠$

## مثـال ٣

**إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين هى ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى.**

**الحـل**

بفرض أن قياسى الزاويتين (٣ س)° ، (٥ س)°

∴ ٣ س + ٥ س = ٩٠

∴ ٨ س = ٩٠ ⟸ س = ١١,٢٥

∴ **قياس الزاوية الأولى** = (٣ × ١١,٢٥)° = °٣٣,٧٥ = °٣٣ ′٤٥

∴ **قياس الزاوية الثانية** = (٥ × ١١,٢٥)° = °٥٦,٢٥ = °٥٦ ′١٥

**تذكر أن**

مجموع قياسى الزاويتين المتتامتين = °٩٠

مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = °١٨٠

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = °١٨٠

**سؤال ١**

١ **اكتب كلًا من الآتى بالدرجات:** (أ) °٧٦ ′٤٢ (ب) °٦٥ ′٣٣ ″٣٦

٢ **اكتب كلًا مما يأتى بالدرجات والدقائق والثوانى:**

(أ) °٣٤,٦ (ب) °٨٣,٢٤

٣ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين هى ٧ : ٩ **فأوجد قياسهما الستينى.**

٤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث هى ٢ : ٧ : ٧ **فأوجد القياس الستينى لكل زاوية.**

## ثانيًا النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:

- فى أى مثلث قائم الزاوية، النسب المثلثية لأى من زاويتيه الحادتين هى نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع هذا المثلث.
- **وتوجد ثلاث نسب مثلثية أساسية للزاوية الحادة، وهى:**

١ **جيب الزاويــة :** وتكتب اختصارًا **جا** وعلى الآلة الحاسبة تكتب (Sin) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

٢ **جيب تمام الزاوية :** وتكتب اختصارًا **جتا** وعلى الآلة الحاسبة تكتب (Cos) = $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

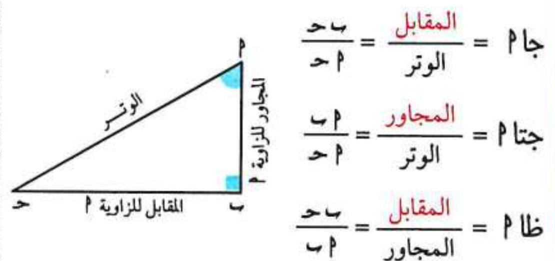
٣ **ظل الزاويــة :** وتكتب اختصارًا **ظا** وعلى الآلة الحاسبة تكتب (Tan) = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

**فمثلًا:** فى △ ٢ ب حـ القائم الزاويـة فى ب:

جا ٢ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{٢ حـ}}$

جتا ٢ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{٢ ب}}{\text{٢ حـ}}$

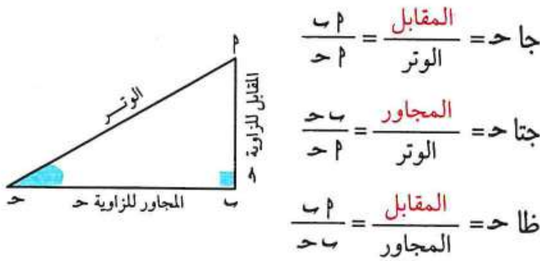
ظا ٢ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{٢ ب}}$




جا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{٢ ب}}{\text{٢ حـ}}$

جتا حـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{٢ حـ}}$

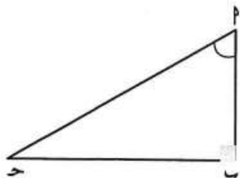
ظا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{٢ ب}}{\text{ب حـ}}$




**لاحظ أن** فى علم حساب المثلثات غالبًا ما يستخدم حرف رأس الزاوية للإشارة إلى قياس الزاوية.

### نقاط هامة

- **إذا كانت:** ∠ ٢ هى زاوية حادة فى △ ٢ ب حـ القائم الزاوية فى ب




**فـإن :** ظا ٢ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{٢ ب}}$ (بقسمة كل من البسط والمقام على ٢ حـ)

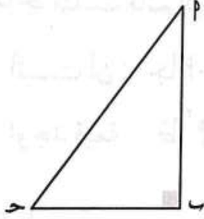
ظا ٢ = $\frac{\frac{\text{ب حـ}}{\text{٢ حـ}}}{\frac{\text{٢ ب}}{\text{٢ حـ}}} = \frac{\text{جا ٢}}{\text{جتا ٢}}$ $\xLeftarrow{\text{أى أن:}}$ ظا ٢ = $\frac{\text{جا ٢}}{\text{جتا ٢}}$

**فمثلًا:** إذا كان: جا ٢ = ٠,٦ ، جتا ٢ = ٠,٨ **فـإن:** ظا ٢ = $\frac{\text{جا ٢}}{\text{جتا ٢}} = \frac{٠,٦}{٠,٨} = \frac{٣}{٤}$



**تذكر نظرية فيثاغورث:**

إذا كان $\triangle$ ٍ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن:




١ ٍ حـ = $\sqrt{(ٍ ب)^٢ + (ب حـ)^٢}$

٢ ٍ ب = $\sqrt{(ٍ حـ)^٢ - (ب حـ)^٢}$

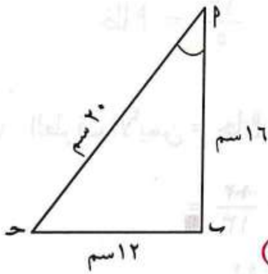
٣ ب حـ = $\sqrt{(ٍ حـ)^٢ - (ٍ ب)^٢}$

## مثال ٤

ٍ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وفيه: ٍ حـ = ٢٠سم ، جتا ٍ = $\frac{٤}{٥}$

أوجد: ١ طول كلٍّ من: $\overline{ٍ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ٢ النسب المثلثية الأساسية للزاويتين ٍ ، حـ

### الحل




١ ∵ جتا ٍ = $\frac{ٍ ب}{ٍ حـ}$ ، جتا ٍ = $\frac{٤}{٥}$

∴ $\frac{ٍ ب}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$ ∴ ٍ ب = $\frac{٢٠ \times ٤}{٥}$ = ١٦سم

ب حـ = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (١٦)^٢}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢سم (نظرية فيثاغورث)

٢ • النسب المثلثية الأساسية للزاوية ٍ :

جا ٍ = $\frac{ب حـ}{ٍ حـ} = \frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$

جتا ٍ = $\frac{ٍ ب}{ٍ حـ} = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$

ظا ٍ = $\frac{ب حـ}{ٍ ب} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

• النسب المثلثية الأساسية للزاوية حـ :

جا حـ = $\frac{ٍ ب}{ٍ حـ} = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$

جتا حـ = $\frac{ب حـ}{ٍ حـ} = \frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$

ظا حـ = $\frac{ٍ ب}{ب حـ} = \frac{١٦}{١٢} = \frac{٤}{٣}$

### سؤال ٢

ٍ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وفيه: ٍ ب = ٩سم ، جتا ٍ = $\frac{٣}{٥}$ أوجد:

١ طول كلٍّ من: $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ٍ حـ}$ ٢ جا ٍ + جتا حـ

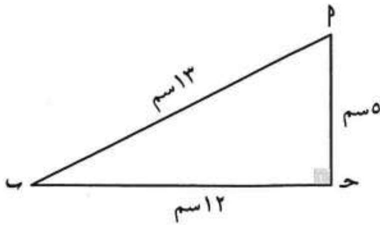
## مثـال ٥

ﻫ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ وكان: ﻫ ب = ١٣سم ، ب حـ = ١٢سم

١ أثبــت أن : جا ﻫ جتا ب + جتا ﻫ جا ب = ١

٢ أوجد قيمة : ظا$^{٢}$ ﻫ + ١

### الحـل




ﻫ حـ = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (١٢)^{٢}}$ = ٥ سم (نظرية فيثاغورث)

ويكـون: جا ﻫ = $\frac{١٢}{١٣}$ جا ب = $\frac{٥}{١٣}$

جتا ﻫ = $\frac{٥}{١٣}$ جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$

ظا ﻫ = $\frac{١٢}{٥}$ ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

١ الطرف الأيمن = جا ﻫ جتا ب + جتا ﻫ جا ب

= $\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣}$ جيب الزاوية = جيب تمام متممتها

= $\frac{١٤٤ + ٢٥}{١٦٩} = \frac{١٦٩}{١٦٩}$

= ١ = الطرف الأيسر

٢ ظا$^{٢}$ ﻫ + ١ = $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ + ١ = $\frac{١٤٤}{٢٥}$ + ١ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

**لاحظ أن**

ظا$^{٢}$ ﻫ = (ظا ﻫ)$^{٢}$ = ظا ﻫ × ظا ﻫ

### سؤال ٣

ﻫ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ﻫ ب = ١٥سم ، ﻫ حـ = ٢٥سم ، **أوجـد كلًّا من:**

١ النسب المثلثية الأساسية للزاويتين ﻫ ، حـ

٢ ظا ﻫ × ظا حـ

٣ جا$^{٢}$ ﻫ + جا$^{٢}$ حـ



## نقاط هامة

- إذا كانت: (∠ أ) ، (∠ ب) زاويتين متتامتيـن فإن جا أ = جتا ب ، جا ب = جتا أ

والعكس صحيح إذا كانت: (∠ أ) ، (∠ ب) زاويتين حادتيـن وكان جا أ = جتا ب أو جا ب = جتا أ

فـإن: (∠ أ) تتمم (∠ ب)

## مثـال ٦

أوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة:

١ جا ٧٠° = جتا س

٢ جتا س = جا ٣٠°

٣ جا (١٠° + س) = جتا ٧٠°

### الحـل

١ ∵ جا ٧٠° = جتا س
∴ س + ٧٠° = ٩٠°
س = ٢٠°

٢ ∵ جتا س = جا ٣٠°
∴ س + ٣٠° = ٩٠°
س = ٦٠°

٣ ∵ جا (١٠° + س) = جتا ٧٠°
∴ ١٠° + س + ٧٠° = ٩٠°
∴ س = ٩٠° − ٨٠°
س = ١٠°

## سؤال ٤

اختر الإجابـة الصحيحـة:

١ إذا كان: ق (∠ أ) = ٧٥° ، جا ب = جتا أ حيث ب زاوية حادة ، فإن: ق (∠ ب) = .......... (الدقهلية ٢٠٢٠)

(أ) ٤٥° (ب) ٧٥° (جـ) ١٥° (د) ١٠٥°

٢ إذا كان: جا ٢٥° = جتا س فإن س = .......... (حيث س قياس زاوية حادة)

(أ) ٢٥° (ب) ٥٥° (جـ) ٦٥° (د) ٧٥°

٣ إذا كان: جا (س − ١٠)° = جتا ٥٠° فإن س = .......... (حيث س قياس زاوية حادة)

(أ) ٤٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٥٠° (د) ٩٠°

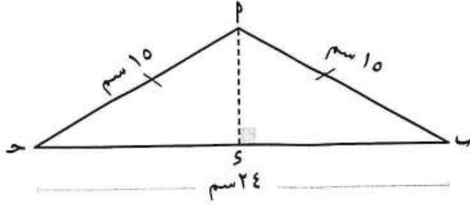
٤ إذا كان: جتا ٢س = جا س فإن س = .......... (حيث س قياس زاوية حادة)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

٥ إذا كانت: جا هـ = جتا هـ فإن: ق (∠ هـ) = .......... (حيث هـ زاوية حادة) (سوهاج ٢٠١٩)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

## مثال ٧




**فى الشكل المقابل:** المثلث أ ب حـ متساوى الساقين فيـه:

أ ب = أ حـ = ١٥سم ، ب حـ = ٢٤ سم

رسـم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ **أوجـد قيمة كل من:**

١ جاب + جتاحـ ٢ ظاحـ × ظاب ٣ جا٢ حـ + جتا٢ حـ

### الحـل

∵ أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

∴ ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ حـ ء = ب ء = ١٢ سم

فى △ أ ء حـ ∵ ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°

∴ أ ء = $\sqrt{(١٥)^٢ - (١٢)^٢}$ = ٩ سم (نظرية فيثاغورث)

١ فى △ أ ء ب: جا ب = $\frac{أ ء}{أ ب} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

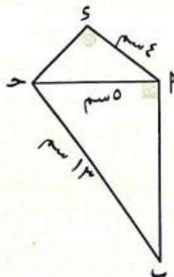
فى △ أ ء حـ: جتاحـ = $\frac{ء حـ}{أ حـ} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

∴ جا ب + جتا حـ = $\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} = \frac{٧}{٥}$

٢ ظا حـ × ظا ب = $\frac{٩}{١٢} \times \frac{٩}{١٢} = \frac{٨١}{١٤٤} = \frac{٩}{١٦}$

٣ جا٢ حـ + جتا٢ حـ = $(\frac{٣}{٥})^٢ + (\frac{٤}{٥})^٢ = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = ١$

## سؤال ٥




**فى الشكل المقابل:** ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠° ،

أ ء = ٤ سم ، أ حـ = ٥ سم ، ب حـ = ١٣سم أوجد قيمة كلٍّ من:

١ ظا(∠ أ حـ ب) + ظا(∠ أ حـ ء)

٢ جا(∠ ب) جتا(∠ حـ أ ء) + جتا(∠ ب) جا(∠ حـ أ ء)

## مثـال ٨

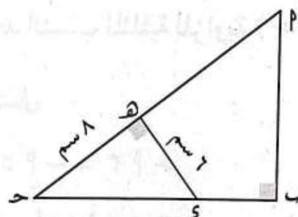
فى الشكل المقابل:

$\triangle$ ﺃ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ء $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ءهـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ﺃ حـ}}$ ،

ءهـ = ٦ سم ، هـ حـ = ٨ سم

أوجد جا ﺃ ، جتا ﺃ ، جتا ($\angle$ هـ ء حـ)

ثم أثبت أن: جا ﺃ جتا حـ + جا حـ جتا ($\angle$ هـ ء حـ) = ١




**الحـل**

فى $\triangle$ ءهـ حـ :

$\because$ ق ($\angle$ ءهـ حـ) = ٩٠° $\therefore$ (ء حـ)$^٢$ = (٦)$^٢$ + (٨)$^٢$ = ١٠٠ $\therefore$ ء حـ = ١٠ سم

$\because$ $\angle$ ﺃ تتمم $\angle$ حـ $\therefore$ جا ﺃ = جتا حـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا ﺃ = جا حـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

جتا ($\angle$ هـ ء حـ) = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

جا ﺃ جتا حـ + جا حـ جتا ($\angle$ هـ ء حـ) = $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥}$ = ١ **(وهو المطلوب)**

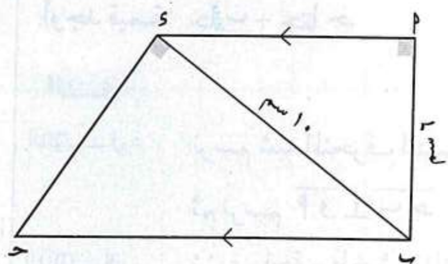
## مثـال ٩

فى الشكل المقابل: (المنيا ٢٠٢٤)

ﺃ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ﺃ ، $\overline{\text{ﺃ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ،

ق ($\angle$ ب ء حـ) = ٩٠° ، ﺃ ب = ٦ سم ، ب ء = ١٠ سم

أوجـد : ظا ($\angle$ ﺃ ء ب) ، طول $\overline{\text{ء حـ}}$




**الحـل**

$\because$ $\triangle$ ﺃ ب ء فيـه : ق ($\angle$ ﺃ) = ٩٠°

$\therefore$ (ﺃ ء)$^٢$ = (ب ء)$^٢$ − (ﺃ ب)$^٢$ = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

$\therefore$ ﺃ ء = ٨ سم $\therefore$ ظا ($\angle$ ﺃ ء ب) = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

، $\because$ $\overline{\text{ﺃ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ قاطع لهما $\therefore$ ق ($\angle$ ء ب حـ) = ق ($\angle$ ﺃ ء ب) (بالتبادل)

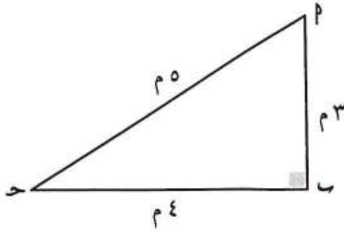
$\therefore$ ظا ($\angle$ ء ب حـ) = ظا ($\angle$ ﺃ ء ب)

، $\because$ ظا ($\angle$ ء ب حـ) = $\frac{\text{ء حـ}}{\text{ب ء}}$ $\therefore$ $\frac{\text{ء حـ}}{١٠}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\therefore$ ء حـ = $\frac{٣ \times ١٠}{٤}$ = ٧,٥ سم

## مثـال ١٠

ﻤ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث ٥ ﻤ ب = ٣ ﻤ حـ

**أوجد النسب المثلثية للزاوية (حـ)**




**الحـل**

∵ ٥ ﻤ ب = ٣ ﻤ حـ $\quad$ ∴ $\frac{ﻤ ب}{ﻤ حـ} = \frac{٣}{٥}$

بفرض أن: ﻤ ب = ٣م ، ﻤ حـ = ٥م (حيث م ≠ ٠)

، ∵ $(ب حـ)^2 = (ﻤ حـ)^2 - (ﻤ ب)^2$

∴ $(ب حـ)^2 = (٥ م)^2 - (٣ م)^2 = ٢٥ م^2 - ٩ م^2 = ١٦ م^2$ $\quad$ ∴ ب حـ = ٤ م

جا حـ = $\frac{٣م}{٥م} = \frac{٣}{٥}$ ، جتا حـ = $\frac{٤م}{٥م} = \frac{٤}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{٣م}{٤م} = \frac{٣}{٤}$

## مثـال ١١

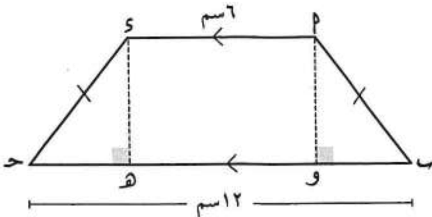
ﻤ ب حـ ى شبـه منحرف متساوى الساقين فيـه:

$\overline{ﻤ ى}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ﻤ ى = ٦ سم ، ب حـ = ١٢سم

، مساحة سطحه = ٣٦سم$^2$

أوجد قيمـة: جا ب + جتا حـ **(المنوفية ٢٠١٩)**

**الحـل**




العمـــل : نرسم شبه المنحرف المتساوى الساقين ﻤ ب حـ ى

ثم نرسم $\overline{ﻤ و}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ى هـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

البرهـــان : ∵ مساحة سطح شبه المنحرف = ٣٦سم$^2$

∴ $\left(\frac{٦ + ١٢}{٢}\right)$ × ﻤ و = ٣٦

٩ × ﻤ و = ٣٦

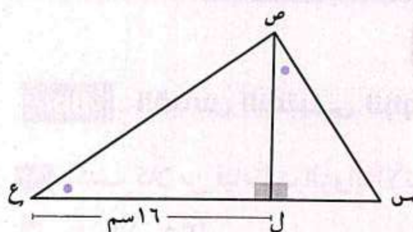
∴ ﻤ و = ٤سم

∵ ﻤ ب حـ ى شبه منحرف متساوى الساقين ، ﻤ و = ى هـ ، ب و = هـ حـ

∴ ب و = هـ حـ = $\frac{١٢ - ٦}{٢}$ = ٣سم

∴ ﻤ ب = ى حـ = $\sqrt{(٤)^2 + (٣)^2}$ = ٥سم $\quad$ ∴ جا ب + جتا حـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥}$

## مثال ١٢




فى الشكل المقابل: س ص ع مثلث فيـه :

$\overline{\text{ص ل}} \perp \overline{\text{س ع}}$ ويقطعه فى ل ، ل ع = ١٦ سم

فإذا كان: ظا(∠ ع) = ظا(∠ س ص ل) = $\frac{٣}{٤}$

فأوجد مساحة سطح △ س ص ع

ثم أثبت أن: ص ع جتا(∠ ع) + س ص جتا(∠ س) = ٢٥

### الحـل

فى △ ص ل ع : ظا(∠ ع) = $\frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{\text{ص ل}}{١٦}$

∴ ص ل = $\frac{١٦ \times ٣}{٤}$ = ١٢ سم

فى △ س ص ل : ظا(∠ س ص ل) = $\frac{\text{س ل}}{\text{ل ص}}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{\text{س ل}}{١٢}$

∴ س ل = $\frac{١٢ \times ٣}{٤}$ = ٩ سم

∴ س ع = ٩ + ١٦ = ٢٥سم

مساحة سطح △ س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ١٢ = ١٥٠سم$^٢$

ص ع جتا(∠ ع) + س ص جتا(∠ س) = ص ع × $\frac{١٦}{\text{ص ع}}$ + س ص × $\frac{٩}{\text{س ص}}$ = ١٦ + ٩ = ٢٥

### سؤال ٦

(١) ٮ ب حـ ٮ شبه منحرف متساوى الساقين فيـه: (كفر الشيخ ٢٠٢٠)

$\overline{\text{ٮ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ٮ ء = ٤ سم ، ٮ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم

أوجد قيمـة المقـدار: $\frac{\text{ظا ب جتا حـ}}{\text{جتا}^٢ \text{ حـ} + \text{جا}^٢ \text{ حـ}}$

(٢) ٮ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيـث جا حـ = $\frac{٨}{١٧}$ ، احسب جتا حـ ، ظا حـ




تدرّب الدرس ١

# النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

▲ تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

## تدريبات الأضـــواء

### أولًا القياس الستينى للزاويـة

١ اكتب كلًّا من قياسات الزوايا الآتية بالدرجات فقط باستخدام الآلة الحاسبة:

١ ٣٥° ١٢َ     ٢ ٢٥° ١٥َ ٣٦ً     ٣ ٤٥° ٣َ ٥٤ً

---

٢ اكتب كلًّا من قياسات الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثوانى:

١ ٢٣,٢°     ٢ ٧٨,٠٨°     ٣ ٥٦,١٨°

---

٣ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين ٥ : ٦

فأوجد القياس الستينى للزاوية الصغرى.

### ثانيًا النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

١ لأى زاوية حادة ﺃ يكون $\frac{\text{جا ﺃ}}{\text{جتا ﺃ}}$ = ............... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) $\frac{1}{\text{جا ﺃ}}$    (ب) جتا ﺃ    (جـ) ظا ﺃ    (د) ١

٢ إذا كان: س، ص قياسى زاويتين متتامتين، وكان جا س= $\frac{٣}{٥}$ فإن: جتا ص = ........... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{٤}{٥}$    (ب) $\frac{٣}{٥}$    (جـ) $\frac{٣}{٤}$    (د) $\frac{٥}{٣}$

٣ إذا كان: جا ٧٠° = جتا ٢س حيث ٢س قياس زاوية حادة، فإن: س = ............... (قنا ٢٠٢٤)

(أ) ١٠°    (ب) ٢٠°    (جـ) ٤٥°    (د) ٣٥°

٤ ﺃ ب حـ مثلث فيـه: جا ﺃ = جتا ب فـإن: ق(∠ حـ) = ............... (كفر الشيخ ٢٠٢٣)

(أ) ٣٠°    (ب) ٤٥°    (جـ) ٦٠°    (د) ٩٠°

٥ Δ ﺃ ب حـ فيـه: ق(∠ ﺃ) = ٨٥°، جاب = جتاب فإن: ق(∠ حـ) = ...........° (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) ٣٠    (ب) ٤٥    (جـ) ٥٠    (د) ٦٠

٦ ظاهـ × جتاهـ = ...............

(أ) جتاهـ    (ب) $\frac{1}{\text{جتاهـ}}$    (جـ) $\frac{1}{\text{جاهـ}}$    (د) جاهـ

٧ لأى زاوية حادة قياسها ﺃ يكون المقدار : جا ﺃ − جتاﺃ ظاﺃ = ............... (سوهاج ٢٠٢٥)

(أ) −١    (ب) صفر    (جـ) ١    (د) ٢

٨ إذا كان ٩ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، وكان ٩ حـ = ١٥ سم ، جا ٩ = $\frac{٣}{٥}$ فإن: ٩ ب = ........ سم

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٥ (د) ٥

٩ ٩ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث ٣ ٩ حـ = ٥ ب حـ فإن: ظا ٩ = .............. (الشرقية ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

١٠ لأى زاويتين حادتين ٩ ، ب إذا كان: ق (∠ ٩) + ق (∠ ب) = ٩٠°، ق (∠ ٩) ≠ ق (∠ ب)

فإن : .............. (الإسكندرية ٢٠١٩)

(أ) جا ٩ = جتا ب (ب) جا ٩ = جا ب (جـ) ظا ٩ = ظا ب (د) جتا ٩ = جتا ب

١١ إذا كان: △ ٩ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن: جا ٩ + جتا حـ = .............. (الشرقية ٢٠٢٠)

(أ) ٢ جتا حـ (ب) ٢ جا حـ (جـ) ٢ جا ب (د) ظا ٩

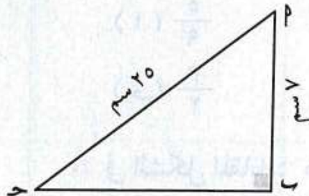
١٢ △ ءهـ و قائم الزاوية فى هـ، أى العلاقات الآتية خطأ؟ .............. (الدقهلية ٢٠١٦)

(أ) ظاء × ظاو = ١ (ب) جاء = جتا و (جـ) جتاء = جا و (د) جتا ء = جاهـ

١٣ ٩ ب حـ مثلث فيه: ق(∠ ب) = ٩٠°، ٣ظا حـ − ٤ = ٠ فإن: ٢٥ جا حـ جتا حـ = ..........

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢٥ (د) ١٢

١٤ فى الشكل المقابل: جا ٩ + جا حـ = ..............



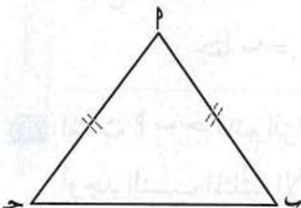

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣١}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١٧}{٢٥}$ (د) ١

١٥ فى الشكل المقابل: △ ٩ ب حـ قائم الزاوية فى ب (أسوان ٢٠١٦)

، $\overline{بهـ}$ متوسط ، ب هـ = ٥ سم ، ٩ ب = ٦ سم

فإن: جا حـ = ..............




(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٦}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

١٦ فى الشكل المقابل: △ ٩ ب حـ فيه: ٩ ب = ٩ حـ

فإن : جا ب جتا حـ − جتا ب جا حـ = ..............

٩
ب حـ

(أ) ٢ (ب) ١

(جـ) −١ (د) صفر

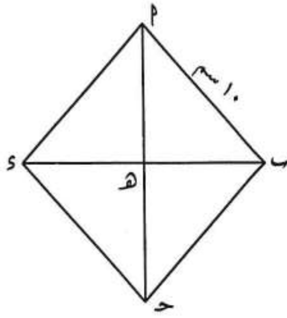
١٧ فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء معين، تقاطع قطراه فى هـ ،

فإذا كان: أ ب = ١٠ سم ، أ حـ = ١٦ سم

فـإن : جا( ∠ ب أ هـ ) = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$

(جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

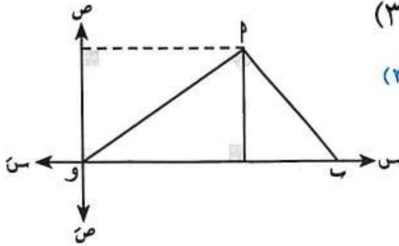



١٨ فى الشكل المقابل: أ ب و مثلث قائم الزاوية فى أ ، النقطة أ (٦ ، ٣)

فإن: ظا ( ∠ أ ب و) = .............. (الغربية ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$



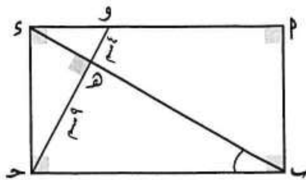

١٩ فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء مستطيل، فيـه:

و هـ = ٤ سم ، هـ حـ = ٩ سم ، $\overline{حـ و} \perp \overline{ب ء}$

فإن: ظا ( ∠ ء ب حـ) = ..............

(أ) $\frac{٥}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

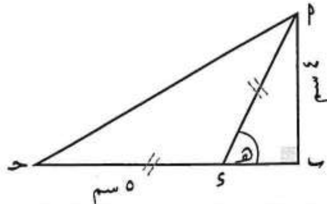
(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٥}$




٢٠ فى الشكل المقابل: ظا($\frac{هـ}{٢}$) = ..............

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) -٤

(جـ) ٠,٥ (د) ٠,٧



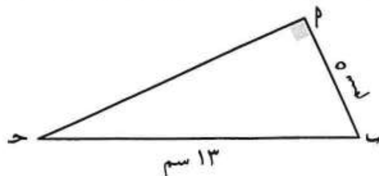

---

٥ فى الشكل المقابل: △ أ ب حـ فيـه:

ق ( ∠ أ ) = ٩٠° ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٣ سم

أكمل: ١ أ حـ = .............. ٢ جا حـ = ..............

٣ جتا ب = .............. ٤ ظا ب = .............. ٥ جتا حـ = ..............




---

٦ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

أوجد النسب المثلثية الأساسية لكل من الزاويتين حـ ، أ

٧ ﻢ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه: ﻢ ب = ٢١ سم ، ب ﺣ = ٢٠ سم

أوجد ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية: جا ﺣ ، جتا ﻢ ، جتا ﺣ ، ظا ﺣ ، جا ﻢ ، ظا ﻢ

---

٨ ﻢ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان ﻢ ب : ﻢ ﺣ = ٣ : ٥ (أسوان ٢٠١٣)

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ﻢ

---

٩ ﻢ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية فى ب ، فيه: ﻢ ب = ٥سم ، ﻢ ﺣ = ١٣سم (القاهرة ٢٠٢٤)

أثبت أن: $جا^{2}$ ﺣ + $جتا^{2}$ ﺣ = ١

---

١٠ ﻢ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية فى ب ، فيه: ﻢ ﺣ = ٥سم ، ب ﺣ = ٤سم (الجيزة ٢٠٢٤)

أوجد قيمة المقدار: جاﻢ جتاﺣ + جتاﻢ جاﺣ

---

١١ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه: س ص = ٣سم ، س ع = ٥سم أوجد قيمة: (سوهاج ٢٠١٣)

١ ظا س × ظا ع  ٢ $جا^{2}$ س + $جا^{2}$ ع

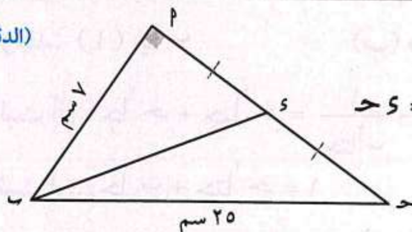
---

١٢ ﻢ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية فى ب ، فيه: ﻢ ب = ٣سم ، ﻢ ﺣ = ٥سم (شمال سيناء ٢٠٢٤)

أوجد قيمة: جتاﻢ جتاﺣ – جاﻢ جاﺣ

---

١٣ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٤)




$\overline{ﻢب} \perp \overline{ﻢﺣ}$ ، ﻢ ب = ٧سم ، ب ﺣ = ٢٥سم ، ﻢ ء = ء ﺣ

أوجد: ظا ﺣ + $\frac{١}{ظا(\angle ﻢ ب ء)}$

---

١٤ إذا كان المثلث ﻢ ب ﺣ قائم الزاوية فى ب وكان جا ﺣ = $\frac{٨}{١٠}$ فأوجد قيمة:

١ جا ﺣ جتا ﻢ + جا ﻢ جتا ﺣ  ٢ جتا ﻢ جتاﺣ – جا ﻢ جاﺣ

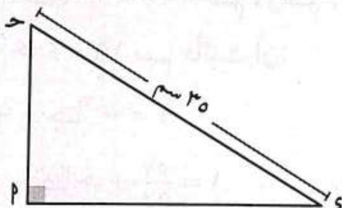
---

١٥ إذا كان المثلث ﻢ ب ﺣ قائم الزاوية فى ب وكان ٣ ظا ﻢ – ٤ = صفر فأوجد قيمة: (سوهاج ٢٠٢٣)

١ ٢٥ جا ﻢ جتا ﻢ  ٢ ظا ﻢ + ظا ﺣ

---

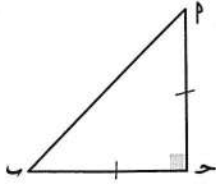
١٦ فى الشكل المقابل: ﺣ ﻢ ء مثلث قائم الزاوية فى ﻢ (الشرقية ٢٠١٦)




إذا كان: ﺣ ء = ٣٥ سم ، جا ء = $\frac{٣}{٥}$

فاحسب: طول $\overline{ﻢﺣ}$ ، محيط △ ﺣ ﻢ ء

١٧ في الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٢٠)




ﺃ ﺏ ﺣ مثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية فى ﺣ ،
وطول كل من ساقيه ﻟ وحدة طول، أوجد:

١ النسبة بين أطوال أضلاع المثلث ﺃ ﺣ : ﺏ ﺣ : ﺃ ﺏ

٢ ظا ﺏ ، جا ﺃ

---

١٨ ﺃ ﺏ ﺣ مثلث متساوى الساقين ، ﺃ ﺏ = ﺃ ﺣ ، جا $\frac{ﺃ}{٢} = \frac{٤}{٥}$ (البحر الأحمر ٢٠١٣)

أوجد: جتا ﺏ (بدون استخدام الحاسبة)

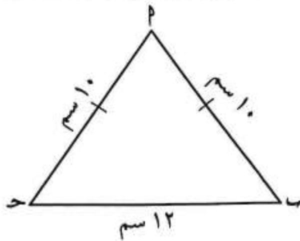
---

١٩ ﺃ ﺏ ﺣ مثلث فيه: ﺃ ﺏ = ﺃ ﺣ = ٥ سم ، ﺏ ﺣ = ٨ سم (البحيرة ٢٠٢٣)

رُسم $\overleftrightarrow{ﺃ ۶} \perp \overline{ﺏ ﺣ}$ ، $\overleftrightarrow{ﺃ ۶} \cap \overline{ﺏ ﺣ} = \{۶\}$ ، أثبت أن: $\frac{\text{٥ ظا ﺏ جتا ﺣ}}{\text{جا}^٢\text{ ﺣ + جتا}^٢\text{ ﺏ}} = ٣$

---

٢٠ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٩)




ﺃ ﺏ ﺣ مثلث متساوى الساقين حيث:
ﺃ ﺏ = ﺃ ﺣ = ١٠ سم ، ﺏ ﺣ = ١٢ سم

١ أوجد: (أ) جا ﺏ (ب) مساحة المثلث ﺃ ﺏ ﺣ

٢ أثبت أن: $\text{جا}^٢\text{ ﺣ + جتا}^٢\text{ ﺣ} = \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{ ﺏ}} - \text{ظا}^٢\text{ ﺏ}$

٣ أثبت أن: $\text{جا}^٢\text{ ﺏ + جتا}^٢\text{ ﺣ} = ١$

---

٢١ المثلث ﺃ ﺏ ﺣ متساوى الساقين، فيه: ﺃ ﺏ = ﺃ ﺣ = ١٣ سم ، ﺏ ﺣ = ١٠ سم أوجد:

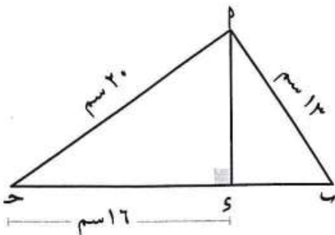
١ طول الارتفاع النازل من الرأس ﺃ على $\overline{ﺏ ﺣ}$

٢ مساحة سطح المثلث ﺃ ﺏ ﺣ

٣ قيمة $\text{جتا}^٢\text{ ﺏ} - \text{جا}^٢\text{ ﺏ} + ٢\text{ جا ﺏ جتا ﺏ}$

---

٢٢ في الشكل المقابل: ﺃ ﺏ ﺣ مثلث، فيه:



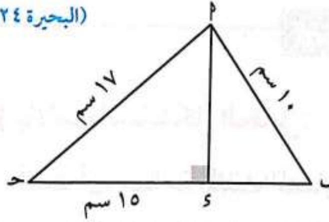

ﺃ ﺏ = ١٣ سم، ﺃ ﺣ = ٢٠ سم ، رُسم $\overline{ﺃ ۶} \perp \overline{ﺏ ﺣ}$ يقطعها فى ۶

فإذا كان: ﺣ ۶ = ١٦ سم فأثبت أن:

١ $\text{جا}^٢\text{ ﺏ + جتا}^٢\text{ ﺏ} = ١$

٢ $\text{جا ﺏ} - \text{جتا ﺣ} + \frac{٥٧}{٦٥} = ١$

٢٣ فى الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠٢٤)




$\overline{أء} \perp \overline{بحـ}$ ، أ ب = ١٠سم ،

أ حـ = ١٧سم ، ء حـ = ١٥سم

أوجد قيمة: ٣ظا حـ + جا ب

---

٢٤ إذا كان أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى حـ : (الوادى الجديد ٢٠١٣)

١ فأوجد: جا ب + جتا ب

٢ أثبت أن: جا ب + جتا ب > ١

---

٢٥ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه: $\overline{أء} // \overline{بحـ}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ٣ سم ،

(الجيزة ٢٠٢٣)

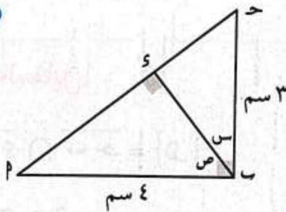
أ ء = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم

١ أوجد: (أ) طول $\overline{حـء}$ (ب) جتا(∠ب حـ ء)

٢ أثبت أن: جتا(∠ ء حـ ب) - ظا(∠أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$

---

٢٦ فى الشكل المقابل: (توجيه الشرقية ٢٠٢٤)



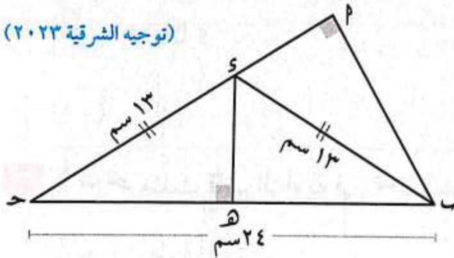

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، $\overline{بء} \perp \overline{أحـ}$ ،

أ ب = ٤سم ، ب حـ = ٣سم

أوجد قيمة: ظا س ظا ص + جا أ

---

٢٧ فى الشكل المقابل: (توجيه الشرقية ٢٠٢٣)




أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ،

ء ∈ $\overline{أحـ}$ بحيث ء ب = ء حـ = ١٣سم ،

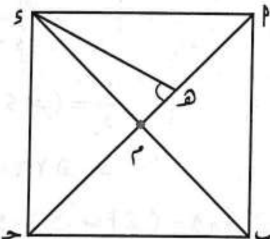
$\overline{ءهـ} \perp \overline{بحـ}$ ، ب حـ = ٢٤سم أوجد قيمة:

١ ظا(∠ ء حـ ب)

٢ جتا(∠أ ب حـ)

---

٢٨ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٣)



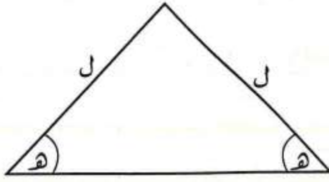

أ ب حـ ء مربع، تقاطع قطراه فى م ،

هـ ∈ $\overline{أحـ}$ بحيث حـ هـ = ٥سم ، أ هـ = ٣سم

أوجد قيمة: ظا(∠ ء هـ حـ)

## تفكير إبداعى TIMSS

**٢٩** بالاستعانة بالشكل المقابل:



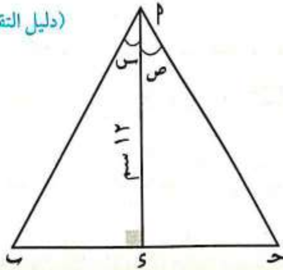

**أثبت أن:** مساحة المثلث المتساوى الساقين تساوى ل$^{٢}$ جا هـ جتا هـ

حيث ل: طول أحد الساقين المتساويين،

هـ: قياس كل زاوية من زاويتى قاعدته.

---

**٣٠** فى الشكل المقابل: (دليل التقويم)



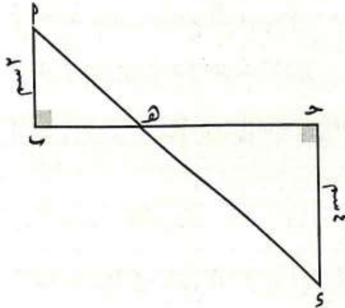

إذا كان: ظاس + ظاص = $\frac{٥}{٤}$ ، أ ء = ١٢ سم

ق (∠ أ ء ب) = ٩٠°

**فأوجد:** طول $\overline{ب حـ}$

---

**٣١** فى الشكل المقابل:




إذا كان: $\overline{أ ء} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$

وكان: ب حـ = ٥ سم

**فأوجد:** ظا ء

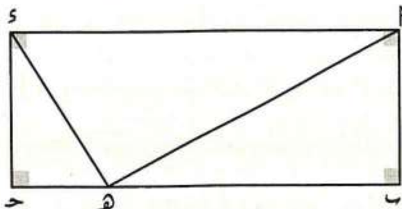
---

**٣٢** أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، مساحته ١٢سم$^{٢}$ ، ظا أ = $\frac{٢}{٣}$

**أوجد:** طول الوتر.

---

**٣٣** فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء مستطيل فيه:



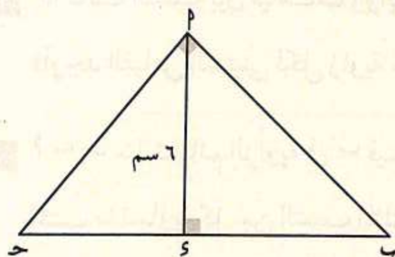

هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ ،

ظا (∠ هـ ء حـ) = $\frac{١}{٥}$

وكان أ ء = ٢٦ هـ حـ

**فأثبت أن:** ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ ء هـ حـ)

**٣٤** **في الشكل المقابل:** $\triangle$ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ



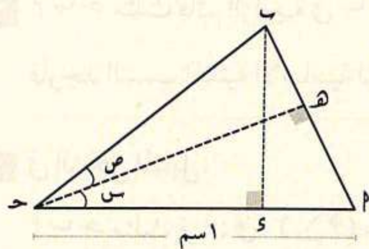

، $\overline{أء} \perp \overline{بحـ}$ وكان أ ء = ٦ سم

، ظا ب + ظا حـ = $\frac{٥}{٣}$

**احسب طول:** $\overline{بحـ}$

---

**٣٥** **في الشكل المقابل: أثبت أن:**




١ مساحة $\triangle$ أ حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ جا س جتا س

٢ مساحة $\triangle$ ب حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ (ب حـ)$^{٢}$ جا ص جتا ص

٣ مساحة $\triangle$ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ (ب حـ) جا (س + ص)

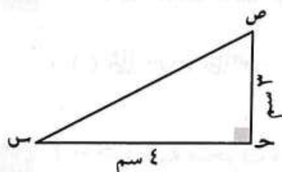
٤ ب حـ = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا ص}}$

٥ جا (س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص

**إرشاد:**
مساحة $\triangle$ أ ب حـ = مساحة $\triangle$ أ حـ هـ
+ مساحة $\triangle$ ب حـ هـ

## تدريبات الكتاب المدرسي

**١** **في الشكل المقابل، أكمل:**




(أ) جا س = ......... (ب) جتا س = .........

(جـ) ظا س = ......... (د) جتا ص = .........

(هـ) ظا ص = ......... (و) جا ص = .........

---

**٢** إذا كانت: النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥

**فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى. (القاهرة ٢٠١٦)

---

**٣** إذا كانت: النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥

**فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستينى. (الأقصر ٢٠٢٢)

٤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧

فأوجد القياس الستينى لكل زاوية من زواياه. (البحيرة ٢٠١٣)

---

٥ ٢ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : ٢ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ سم

اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية: جا حـ ، جتا ٢ ، جتا حـ ، ظا حـ (الإسكندرية ٢٠١٥)

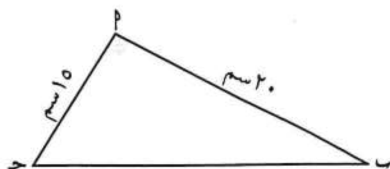
---

٦ ٢ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان: ٢ ٢ ب = $\sqrt{٣}$ ٢ حـ

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية حـ

---

٧ فى الشكل المقابل: (المنيا ٢٠١٩)




٢ ب حـ مثلث فيه: ق (∠ ٢) = ٩٠° ،

٢ حـ = ١٥سم ، ٢ ب = ٢٠سم

أثبت أن: جتا حـ جتا ب - جا حـ جا ب = صفر

---

٨ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه: س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣سم أوجد قيمة:

(١) ظا س + ظا ع (ب) جتا س جتا ع - جا س جا ع (قنا ٢٠٢٢)

(جـ) جا س جتا ع + جتا س جا ع (بنى سويف ٢٠٢٢)

---

٩ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧ سم، س ص = ٢٥ سم أوجد قيمة كل من:

(١) ظا س × ظا ص (الغربية ٢٠٢٣) (ب) $جا^٢$ س + $جا^٢$ ص

---

١٠ ٢ ب حـ ٤ شبه منحرف متساوى الساقين فيه : $\overline{٢ ٤}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ٢ ٤ = ٤سم ، ٢ ب = ٥سم ، ب حـ = ١٢سم

أثبت أن: $\frac{\text{٥ ظا ب جتا حـ}}{\text{جا}^٢ \text{حـ + جتا}^٢ \text{ب}} = ٣$ (الأقصر ٢٠١٨)

---

١١ ٢ ب حـ مثلث فيه: ٢ ب = ٢ حـ = ١٠سم ، ب حـ = ١٢سم ، رسم $\overleftarrow{٢ ٤}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{٢ ٤}$ ∩ $\overline{ب حـ}$ = {٤}

أولًا: أوجد قيمة : جا (∠ حـ ٢ ٤)، جتا (∠ حـ ٢ ٤)، ظا (∠ حـ ٢ ٤) (الإسكندرية ٢٠١٣)

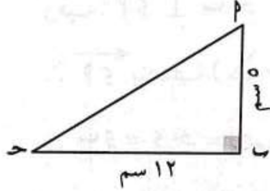
ثانيًا: أثبت أن: (١) $جا^٢$ حـ + $جتا^٢$ حـ = ١ (ب) جا ب + جتا حـ > ١

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ فى △ ﻫ ب حـ إذا كان: جا ﻫ = جتا حـ فإن △ ﻫ ب حـ يكون ............ (الشرقية ٢٠٢٣)

( ا ) منفرج الزاوية ومتساوى الساقين (ب) منفرج الزاوية

(جـ) حاد الزوايا ( د ) قائم الزاوية




٢ فى الشكل المقابل: جتا ﻫ = ............ (المنوفية ٢٠١٣)

( ا ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{١٢}{٥}$

(جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ ( د ) $\frac{٥}{١٣}$

٣ إذا كان: جاس = جتاس حيث س زاوية حادة ، فإن: ق (∠س) = ............° (القاهرة ٢٠٢٤)

( ا ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ ( د ) ٩٠

٤ فى △ ﻫ ب حـ القائم الزاوية فى ﻫ يكون جيب تمام الزاوية ب : جيب الزاوية حـ يساوى ............ (الشرقية ٢٠١٨)

( ا ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ ( د ) ١

٥ حا ٣٠° = جتا ﻫـ ، حيث ﻫـ قياس زاوية حادة ، فإن ﻫـ = ............ (الجيزة ٢٠٢٤)

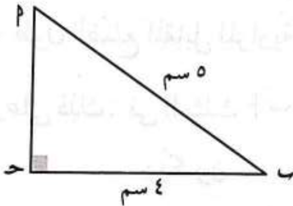
( ا ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° ( د ) ٩٠°

٦ ﻫ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإن $\frac{\text{جاحـ}}{\text{جتا ﻫ}}$ = ............ (بورسعيد ٢٠٢٣)

( ا ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ ( د ) صفر

---

**٢ أجب عن السؤالين التاليين:**

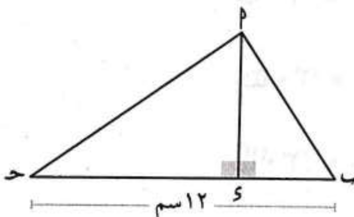



١ فى الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

ﻫ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ

ﻫ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٤ سم

أثبت أن: جا ﻫ جتا ب + جتا ﻫ جا ب = ١




٢ فى الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٣)

△ ﻫ ب حـ حاد الزوايا

ب حـ = ١٢ سم ، $\overline{ﻫء} \perp \overline{بحـ}$

أوجد قيمة: ﻫ ب جتا ب + ﻫ حـ جتا حـ

## ذاكر الدرس ٦

## النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا




**فكر وناقش** في الشكل المقابل:

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٢ل سم

وفيه: $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

∴ $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف (∠ ب أ حـ) ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ ب ء = ء حـ = ل سم ، ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء) = ٣٠°

- ويسمى كل مثلث من المثلثين أ ب ء ، أ حـ ء **مثلثًا ثلاثينيًا ستينيًا**

**ويكون:** (أ ء)$^{٢}$ = (٢ل)$^{٢}$ − ل$^{٢}$ = ٤ل$^{٢}$ − ل$^{٢}$ = ٣ل$^{٢}$ ∴ أ ء = $\sqrt{٣}$ ل سم (نظرية فيثاغورث)

∴ ب ء : أ ء : أ ب = ل : $\sqrt{٣}$ ل : ٢ل

= ١ : $\sqrt{٣}$ : ٢

## أولًا النسب المثلثية الأساسية للزوايا التى قياسها (٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°)

### ١ النسب المثلثية الأساسية للزاويتين اللتين قياسهما ٣٠° ، ٦٠°

**في المثلث الثلاثيني الستيني يكون:**

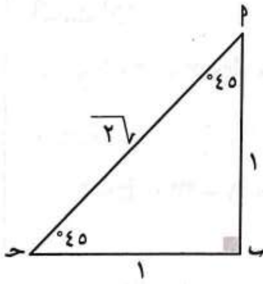
- طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر
- طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر × $\sqrt{٣}$

**وعلى ذلك:** في المثلث أ ب حـ يكون ب حـ : أ حـ : أ ب = ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$

**ويكـون ......**

| | |
|---|---|
| جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ | جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ |
| جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ |
| ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$ |

## ٢ النسب المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها ٤٥°




**فى المثلث القائم الزاوية والمتساوى الساقين يكون:**

- طول الوتر = طول أحد ضلعى الزاوية القائمة × $\sqrt{٢}$
- طول أحد ضلعى الزاوية القائمة = $\frac{\text{طول الوتر}}{\sqrt{٢}}$

**وعلى ذلك:** فى المثلث ا ب حـ يكون ا ب : ب حـ : ا حـ = ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ظا ٤٥° = ١

- ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة فى جدول كالآتى:

| قياس الزاوية / النسبة المثلثية | ٣٠° | ٦٠° | ٤٥° |
|---|---|---|---|
| جا | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ |
| جتا | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ |
| ظا | $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | $\sqrt{٣}$ | ١ |

## مثال ١

أوجد قيمة كل مما يأتى: ① جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° ② جا$^{٢}$ ٦٠° + جتا$^{٢}$ ٦٠°

**الحـل**

① جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ − ١ = صفر

② جا$^{٢}$ ٦٠° + جتا$^{٢}$ ٦٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٤}{٤}$ = ١

**لاحظ أن**

جا$^{٢}$ ا = (جا ا)$^{٢}$

## مثال ٢

أوجـد قيمة س إذا كان: ٤ س = جتا$^{٢}$ ٣٠° ظا$^{٢}$ ٣٠° ظا$^{٢}$ ٤٥° **(الأقصر ٢٠٢٣)**

**الحـل**

٤ س = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$ (١)$^{٢}$ ∴ ٤ س = $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٤}$ ∴ س = $\frac{١}{١٦}$

## مثـال ٣

أثبـت أن:

١ جتا ٦٠° = ٢ جتا$^{٢}$ ٣٠° − ١ ٢ ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$ ٣ جا$^{٢}$ ٣٠° = ٥ جتا$^{٢}$ ٦٠° − ظا$^{٢}$ ٤٥°

### الحـل

١ ٢ جتا$^{٢}$ ٣٠° − ١ = ٢ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ − ١ = $\frac{١}{٢}$ = جتا ٦٠° (وهو المطلوب)

٢ $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$ = $\frac{٢\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)}{١ - \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}}$ = $\sqrt{٣}$ = ظا ٦٠° (وهو المطلوب)

٣ ٥ جتا$^{٢}$ ٦٠° − ظا$^{٢}$ ٤٥° = ٥ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ − $(١)^{٢}$ = $\frac{٥}{٤}$ − ١ = $\frac{١}{٤}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = (جا ٣٠°)$^{٢}$ = جا$^{٢}$ ٣٠°
(وهو المطلوب)

## مثـال ٤

**أوجد قيمة س التى تحقق كلًّا مما يأتى:** (حيث س قياس زاوية حادة) (أسوان ٢٠٢٣)

١ جا س = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° ٢ جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠°

### الحـل

١ جا س = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = جا ٦٠° ∴ س = ٦٠°

٢ جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) - \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)$

= $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ = جا ٣٠° ∴ س = ٣٠°

### سؤال ١

١ **أوجد قيمة كل من:** (أ) جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° جتا ٣٠° (ب) ظا$^{٢}$ ٦٠° − ظا$^{٢}$ ٣٠°

٢ **أوجد قيمة س:** (أ) س جا ٣٠° جتا$^{٢}$ ٤٥° = جتا$^{٢}$ ٣٠° (ب) جتا ٦٠° = س جتا$^{٢}$ ٣٠° − ١

٣ **أثبـت أن:** (أ) ظا$^{٢}$ ٦٠° = ظا ٤٥° + ٢ ظا ٣٠° ظا ٦٠°

(ب) جا$^{٢}$ ٣٠° + جا$^{٢}$ ٦٠° = جتا$^{٢}$ ٣٠° + جتا$^{٢}$ ٦٠°

٤ **أوجد قيمة س :** (حيث س قياس زاوية حادة) (الفيوم ٢٠٢٣)

(أ) ظا ٢س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠° (ب) ظا س = $\frac{\text{جا ٤٠°}}{\text{جتا ٥٠°}}$

## مثال ٥

اختر الإجابة الصحيحة: (البحر الأحمر ٢٠٢٣)

١ ظا ٤٥° جا ٣٠° = ............ ( ١ أو $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{٢}{٣}$ أو $\frac{٣}{٢}$ )

٢ إذا كان: ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن: س = ......° ( ١٠ أو ٢٠ أو ٣٠ أو ٦٠ )

٣ إذا كان: جتا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن: جتا $\frac{١}{٢}$س = ............

( $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أو $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ )

٤ △ أ ب حـ فيـه: ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٣ : ٤ : ٥ فإن: جتا ب = ............

( صفر أو $\frac{١}{٢}$ أو ١ أو $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ )

٥ △ أ ب حـ فيـه: ق(∠أ) = ٧٥° ، جا ب = $\frac{١}{٢}$ فإن: △ أ ب حـ ............

(قائم الزاوية أو متساوى الساقين أو منفرج الزاوية أو متساوى الأضلاع)

### الحـل

١ ظا ٤٥° جا ٣٠° = ١ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

٢ ∵ ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ ∴ ٣س = ٦٠° ∴ س = ٢٠°

٣ ∵ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٦٠°

∴ جتا $\frac{١}{٢}$ س = جتا $\frac{١}{٢}$(٦٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤

| ق(∠أ) | : | ق(∠ب) | : | ق(∠حـ) | : | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣ | : | ٤ | : | ٥ | : | ١٢ |
| ؟ | : | ؟ | : | ؟ | : | ١٨٠° |

∴ ق(∠ب) = $\frac{٤ \times ١٨٠°}{١٢}$ = ٦٠°

∴ جتا ب = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

٥ ∵ جا ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ب) = ٣٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٧٥° + ٣٠°) = ٧٥°

∴ ق(∠أ) = ق(∠حـ) = ٧٥° ∴ △ أ ب حـ متساوى الساقين

### سؤال ٢

اختر الإجابة الصحيحة:

١ ٢ظا ٤٥° − $\frac{١}{جتا ٦٠°}$ = ............ ( صفر أو $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أو ١ )

٢ إذا كان: ظا $\left(\frac{٣س}{٢}\right)$ = ١ حيث $\left(\frac{٣س}{٢}\right)$ قياس زاوية حادة فإن: س = ............

( ١٠° أو ٣٠° أو ٤٥° أو ٦٠° )

## ثانيًا إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلوم قياسها وإيجاد قياس زاوية معلومة إحدى النسب المثلثية لها:

١ **استخدام حاسبة الجيب لإيجاد النسب المثلثية لزاوية معلوم قياسها:**

**يمكن إيجاد جتا (٢٥َ ٣٨°) باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى:**

- نستخدم مفاتيح الآلة الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار لليمين:

Cos ( 3 8 °‚‚‚ 2 5 °‚‚‚ ) =

جتا ٢٥َ ٣٨° ≃ ٠,٧٨٣٥

## مثال ٦



**أوجد باستخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يأتى، مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية:**

١ جا ٧٢° ٢ ظا(١٧ً ١٣َ ٥٢°)

**الحل**

١ نستخدم مفاتيح الآلة الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار لليمين: Sin ( 7 2 ) =

جا ٧٢° ≃ ٠,٩٥١١

٢ نستخدم مفاتيح الآلة الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار لليمين:

tan ( 5 2 °‚‚‚ 1 3 °‚‚‚ 1 7 °‚‚‚ ) =

ظا ١٧ً ١٣َ ٥٢° ≃ ١,٢٩٠٢

٢ **استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية متى عُلمت إحدى النسب المثلثية لها:**

**إذا كان: جاهـ = ٠,٨٨٢٩ فإن: هـ هو قياس الزاوية التى جيبها ٠,٨٨٢٩ ولإيجاد قيمة هـ:**

- نستخدم مفاتيح الآلة الحاسبة بالتتابع التالى من اليسار لليمين:

Shift Sin ( . 8 8 2 9 ) = °‚‚‚

هـ = جا$^{-1}$ (٠,٨٨٢٩) ≃ ٣٩ً ٥٩َ ٦١°

### سؤال ٣

**أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:**

١ جتا ٣٢° ٢ جا ٥٥َ ٤١° ٣ ظا ٢٥ً ٤٣َ ٢٨°

## مثـال ٧

أوجد قيمة أ فى كل مما يلى: (حيث أ قياس زاوية حادة)

١ جا أ = ٠,٤٥٧٩ ٢ جتا أ = ٠,٨٧٥٣ ٣ ظا أ = ٣,١٦٥٦

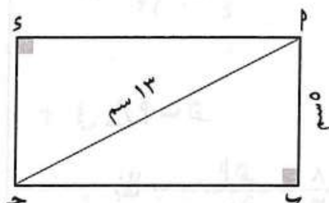
**الحـل**

١ ∵ جا أ = ٠,٤٥٧٩ ∴ أ = $جا^{-1}$ (٠,٤٥٧٩) ≃ ٦″ ١٥′ ٢٧°

٢ ∵ جتا أ = ٠,٨٧٥٣ ∴ أ = $جتا^{-1}$ (٠,٨٧٥٣) ≃ ١٠″ ٥٥′ ٢٨°

٣ ∵ ظا أ = ٣,١٦٥٦ ∴ أ = $ظا^{-1}$ (٣,١٦٥٦) = ٨″ ٢٨′ ٧٢°

## مثـال ٨




فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء مستطيل فيـه:

أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٣سم أوجـد:

١ ق (∠ ب حـ أ) ٢ مساحة سطح المستطيل أ ب حـ ء

**الحـل**

١ ∵ جا (∠ ب حـ أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ∴ ق (∠ ب حـ أ) = $جا^{-1}$ $\left(\frac{٥}{١٣}\right)$

∴ ق (∠ ب حـ أ) ≃ ١٢″ ٣٧′ ٢٢°

٢ ب حـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

∴ مساحة سطح المستطيل أ ب حـ ء = ٥ × ١٢ = ٦٠ سم$^٢$

### سؤال ٤

أوجد س لأقرب درجة فى الحالات التالية (حيث س قياس زاوية حادة):

١ جتا س = ٠,٧٧٧١ ٢ جا س = ٠,٢٥٩ ٣ ظا س = ٠,٩٦٥٨

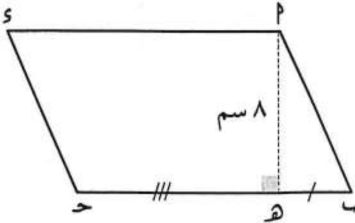
## مثال ٩

أ ب حـ ء متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦سم$^{٢}$ ، رُسم $\overline{أهـ} \perp \overline{ب حـ}$ حيث $\overline{أهـ} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$

وكان ب هـ : هـ حـ = ١ : ٣ ، أ هـ = ٨ سم أوجد :

١ طول كل من $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{هـ حـ}$ ٢ ق ( ∠ حـ )

**الحـل**




١ ∵ مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ب حـ × أ هـ

∴ ٩٦ = ب حـ × ٨ ∴ ب حـ = $\frac{٩٦}{٨}$ ∴ ب حـ = ١٢سم

∵ $\frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{ب هـ}{ب حـ} = \frac{١}{٤}$

∴ $\frac{ب هـ}{١٢} = \frac{١}{٤}$ ∴ ب هـ = ٣ سم ، هـ حـ = ١٢ − ٣ = ٩ سم

٢ فى △ أ ب هـ

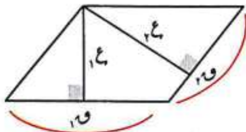
∵ ظا ب = $\frac{أ هـ}{ب هـ} = \frac{٨}{٣}$

∴ ق ( ∠ ب ) = ظا$^{-١}$ ( $\frac{٨}{٣}$ ) ≃ ٣٨″ ٢٦′ ٦٩°

∴ ق ( ∠ حـ ) = ١٨٠° − ٣٨″ ٢٦′ ٦٩°

∴ ق ( ∠ حـ ) ≃ ٢٢″ ٣٣′ ١١٠°

**لاحظ أن**




- مساحة متوازى الأضلاع = ق$_{١}$ ع$_{١}$ = ق$_{٢}$ ع$_{٢}$
- قطرى المعين متعامدان وينصف كل منهما الآخر.
- مساحة سطح المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى القطرين.

## سؤال ٥

أ ب حـ ء معين فيـه: أ حـ = ٨ سم ، ب ء = ٦ سم أوجـد:

١ طول ضلع المعين ٢ مساحة المعين

٣ ق ( ∠ ب أ حـ )




## تدريبات الأضــواء

### أولًا النسـب المثلثيـة الأساسية للزوايـا التى قياساتها ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ جتا ٦٠° = .............. (البحر الأحمر ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{-1}{2}$

٢ ظا ٣٠° = ..............

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) $\sqrt{3}$ (د) $\frac{1}{2}$

٣ جا ٣٠° + جتا ٦٠° = .............. (سوهاج ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٤ ظا$^2$ ٤٥° جتا$^2$ ٦٠° = .............. (سوهاج ٢٠٢٢)

(أ) ١ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ٢

٥ إذا كان س جا ٣٠° = ظا ٤٥° **فإن:** س = .............. (أسيوط ٢٠٢٢)

(أ) -٢ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ١ (د) ٢

٦ إذا كان جا س = $\frac{1}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة **فإن: جتا ٢ س** = .............. (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (جـ) ١ (د) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

٧ إذا كان ظا س = ١ حيث س قياس زاوية حادة **فإن:** س = ..............° (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) ٦٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

٨ ٩ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ٩ فيه ظا ب = ١، **فإن:** ظا حـ - جا ب جتا حـ = .............. (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

٩ إذا كان ٢ جا س = ظا س حيث س قياس زاوية حادة **فإن:** س = ..............° (القليوبية ٢٠٢٣)

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

١٠ إذا كانت النقطة (٤ ، ٦) تحقق المعادلة ص = س جا ٣٠° + حـ **فإن:** حـ = .............. (المنوفية ٢٠١٦)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

١١ إذا كان: جا (ص + ٧)° = ٠,٥ **فإن:** ص = ..............° (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ٢٣ (ب) ٣٠ (جـ) ١٣ (د) ٦٠

١٢ ا ب حـ مثلث فيه ق (∠ا) : ق (∠ب) : ق (∠حـ) = ٢ : ٣ : ٧ فإن: ظا ب = …………

(ا) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) ١

١٣ إذا كان: ظا(س + ١٠°) = $\sqrt{٣}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن: س = …………° (الدقهلية ٢٠٢٤)

(ا) ٦٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

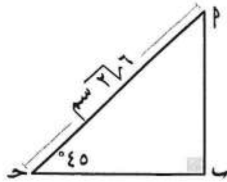
١٤ إذا كان: ٢ جاس = ظا ٦٠° حيث س قياس زاوية حادة فإن: س = ………… (سوهاج ٢٠١١)

(ا) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٤٠°

١٥ ا ب حـ ء هـ و سداسى منتظم ، ق (∠ب ا حـ) = س° فإن: جا س = ………… (الإسكندرية ٢٠٢٣)

(ا) $\frac{ب حـ}{ا ب}$ (ب) $\frac{ب حـ}{ا حـ}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

١٦ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٣)




ا ب = ………… سم

(ا) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

١٧ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، إذا كان: ٢ا ب = $\sqrt{٣}$ ا حـ فإن: ق (∠حـ) = ………… (الدقهلية ٢٠٢٢)

(ا) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

١٨ إذا كان: س ، ص قياسى زاويتين متتامتين وكان: جاس جتاص = جتاس جاص فإن: س = …………

(ا) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

١٩ إذا كان الشكل ا ب حـ ء متوازى أضلاع فإن: جا$\left(\frac{ا + ب}{٤}\right)$ = ………… (الدقهلية ٢٠٢٣)

(ا) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\sqrt{٢}$

٢٠ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، مساحة △ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ (ب حـ)$^{٢}$ ، فإن: ظا ا = …………

(ا) ١ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٢١ إذا كان: س ، ص قياسى زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢ فإن: جاس + جتاص = ……… (البحيرة ٢٠١٥)

(ا) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١

**٢** (بدون استخدام الآلة الحاسبة) **أوجد قيم كلٍّ مما يأتى:**

١ ٤ جا ٤٥° جتا ٤٥° (المنيا ٢٠٢٠)

٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° − جتا$^{٢}$ ٣٠° (المنوفية ٢٠٢٤)

٣ $\frac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠° + \text{ظا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠° - \text{جا}\ ٣٠°}$ (الغربية ٢٠٢٢)

٤ $\frac{\text{ظا}\ ٦٠° - \text{ظا}\ ٣٠°}{١ + \text{ظا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٣٠°}$

---

**٣** **أثبت أن:**

١ جا ٣٠° + جتا ٦٠° = ظا ٤٥°

٢ جا ٣٠° − جتا ٦٠° = ١ − ظا ٤٥°

٣ جتا ٦٠° = جتا$^{٢}$ ٣٠° − جا$^{٢}$ ٣٠° (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

٤ جا$^{٢}$ ٣٠° = ٥ جتا$^{٢}$ ٦٠° − ظا$^{٢}$ ٤٥° (أسوان ٢٠٢٤)

٥ ٢ جا ٣٠° + ٤ جتا ٦٠° = ظا$^{٢}$ ٦٠° (المنيا ٢٠٢٢)

٦ ظا$^{٢}$ ٦٠° − ظا$^{٢}$ ٤٥° = ٤ جا ٣٠° (أسيوط ٢٠٢٢)

٧ جا$^{٣}$ ٣٠° = ٩ جتا$^{٣}$ ٦٠° − ظا$^{٢}$ ٤٥° (الإسكندرية ٢٠٢٤)

---

**٤** (بدون استخدام الآلة الحاسبة) **أوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة:**

١ ظا س = جا$^{٢}$ ٣٠° + جتا$^{٢}$ ٣٠° (أسيوط ٢٠٢٢)

٢ جتا س ظا ٣٠° = جتا$^{٢}$ ٤٥° (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

٣ جتا س = $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° جا ٣٠° (البحر الأحمر ٢٠٢٢)

٤ ٢ جا س° = ظا$^{٢}$ ٦٠° − ٢ ظا ٤٥° (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

٥ جتا س = $\frac{\text{جا}\ ٦٠°\ \text{جا}\ ٣٠°}{\text{جا}^{٢}\ ٤٥°}$

٦ $\frac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠° - \text{جا}\ ٣٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠°}{\text{جا}^{٢}\ ٦٠°\ \text{جا س ظا}\ ٤٥° + \text{جا س جا}^{٢}\ ٣٠°} = ١$

---

**٥** **أوجد قيم س فى كل من الحالات الآتية:**

١ س جا ٣٠° جتا$^{٢}$ ٤٥° = جا$^{٢}$ ٦٠° (أسيوط ٢٠٢٠)

٢ س جتا ٦٠° = جا ٣٠° + ظا ٤٥° (بورسعيد ٢٠٢٢)

٣ س جا$^{٢}$ ٤٥° = ظا$^{٢}$ ٦٠° (سوهاج ٢٠٢٢)

٤ ٢ س ظا ٤٥° = ظا ٦٠° جتا ٣٠° (القاهرة ٢٠٢٤)

---

**٦** إذا كان: ٢ جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث س قياس زاوية حادة، **فأوجد** ظا ٢س (قنا ٢٠٢٤)

---

**٧** إذا كانت: ظا $\frac{٣س}{٢}$ = ١ حيث س قياس زاوية حادة ، **فأوجد** قيمة جا$^{٢}$ س + جتا$^{٢}$ س

---

**٨** إذا كانت: ظا س° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث س° قياس زاوية حادة ، **فأوجد** جا س° ظا $\left(\frac{٣س}{٢}\right)^{°}$ + جتا (٢س)° (دمياط ٢٠٢١)

---

**٩** بسبب الرياح كُسر الجزء العلوى لشجرة، فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠°، إذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٤ أمتار **فأوجد** طول الشجرة لأقرب متر. (الفيوم ٢٠١٤)

## ثانيًا إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلوم قياسها وإيجاد قياس زاوية معلومة إحدى النسب المثلثية لها:

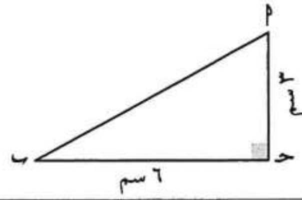
**١٠** أوجد قياس الزاوية (هـ) الحادة فى الحالات الآتية:

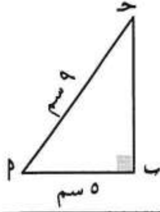
١ جاهـ = ٠,٥ ٢ جاهـ = ٠,٣٢٣٥ ٣ ظاهـ = ٢ ٤ جتاهـ = ٠,٥٤٥٢

**١١** أوجد النسب المثلثية التالية مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية:

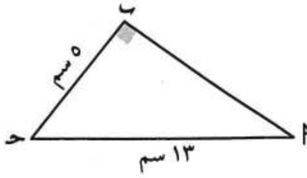
١ جا٤٦° ٢ جتا٣٨َ ٥٩° ٣ ظا١٥َ ٤٦° ٤ جا٣٧ً ١٨َ ٢٠°

**١٢** أوجد قياس الزاوية ( أ ) فى الحالتين الآتيتين:

١



٢



**١٣** فى الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٠)




أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه:

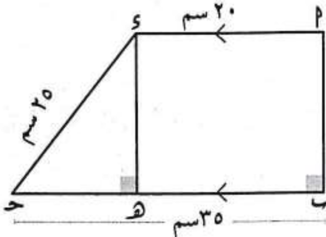
أ حـ = ١٣ سم، ب حـ = ٥ سم، أوجد:

١ ق (∠ أ) لأقرب درجة ٢ جتا أ جتاحـ - جا أ جا حـ

**١٤** أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه: أ ب = أ حـ = ١٢,٦سم ، ق (∠ حـ) = ٢٤َ ٥٤°

أوجد لأقرب رقم عشرى واحد طول $\overline{\text{ب حـ}}$ (الدقهلية ٢٠٢٢)

**١٥** فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٢)

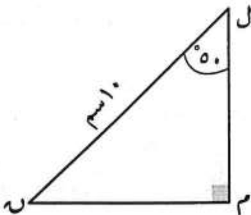



أ ب حـ د شبه منحرف قائم الزاوية فى ب : $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أ د = ٢٠سم ، ب حـ = ٣٥سم ، د حـ = ٢٥سم أوجد:

١ ق (∠ حـ) ٢ طول $\overline{\text{أ ب}}$

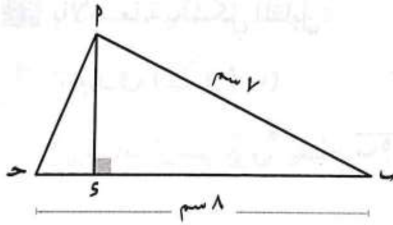
**١٦** فى الشكل المقابل: (المنيا ٢٠٢٣)




ل ن = ١٠ سم ، ق (∠ ل) = ٥٠°

أوجد لأقرب سم طول $\overline{\text{م ل}}$

**17** في الشكل المقابل:



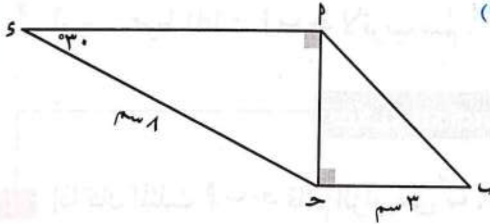

$\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ ، أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم

ومساحة سطح △ أ ب حـ = ١٢ سم² أوجد:

١ طول $\overline{أ ء}$ ٢ ق(∠ ب)

---

**18** في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٨)




ق(∠ ء) = ٣٠° ،

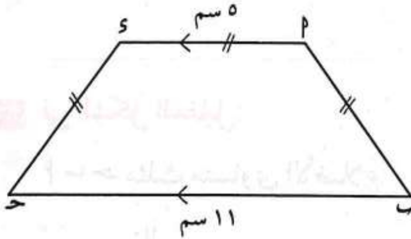
ق(∠ حـ أ ء) = ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠°

ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ٨ سم أوجد:

١ ظا ب ٢ ق(∠ ب أ ء)

---

**19** في الشكل المقابل: (الوادي الجديد ٢٠٢٤)




أ ب حـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه:

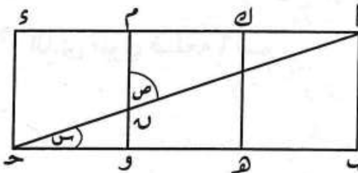
أ ب = أ ء = ء حـ = ٥ سم ، ب حـ = ١١ سم أوجد:

١ ق(∠ ب) ، ق(∠ أ)

٢ مساحة سطح شبه المنحرف أ ب حـ ء

---

**20** في الشكل المقابل:



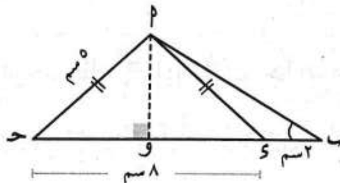

المستطيل أ ب حـ ء مقسم إلى ثلاثة مربعات متطابقة أوجد:

١ ظا س

٢ ظا ص

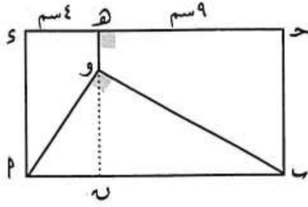
---

**21** بالاستعانة بالشكل المقابل:




أوجد ق(∠ ب)

٢٢ بالاستعانة بالشكل المقابل:




أوجد ق (∠ و ﺃ ب)

(إرشـاد: ارسم $\overleftrightarrow{\text{هـ ن}}$ يقطع $\overline{\text{ﺃ ب}}$ فى ن)

٢٣ ﺃ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيـه: ﺃ ب = ﺃ حـ ، ق (∠ ب) = ٧٦° ، ب حـ = ١٥سم

أوجـد محيط المثلث ﺃ ب حـ لأقرب سم .

## تفكـير إبداعى TIMSS

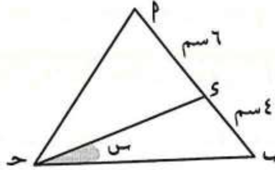
٢٤ إذا كان المثلث ﺃ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، وكان ٣جاﺃ + جتاحـ = ١

فأوجد: ق (∠ ﺃ) (توجيه الشرقية)

٢٥ أوجد مساحة المعين الذى طول ضلعه ٢٤سم وقياس إحدى زواياه ٣٢° .

(مقربًـا الناتـج لأقـرب رقـم عشـرى)

٢٦ فى الشكل المقابل: (توجيه الشرقية)

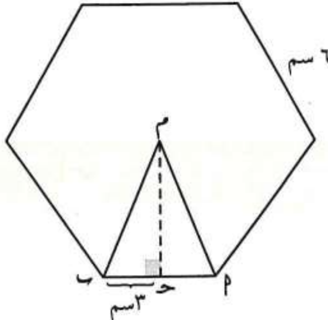



ﺃ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

أوجـد: ظاس

٢٧ أوجـد مساحة السداسى المنتظم

الذى طول ضلعه ٦سم .




٢٨ أوجد ظا $\frac{\text{ص}}{٢}$ إذا كانت جاس = ظا ٣٠° جا ٦٠° ، ٤ جتاس جا ص = ٣

حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين.

## تدريبات الكتاب المدرسى

**١ أكمل ما يأتى:**

١ إذا كانت جاس = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ..................

٢ إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن ق(∠س) = ..................

٣ جا ٦٠° + جتا ٣٠° - ظا ٦٠° = ..................

٤ إذا كانت ظا (س + ١٠)° = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ..................

٥ إذا كانت ظا(٣س)° = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ..................

---

**٢ أوجد قيمة المقدار التالى مبينًا خطوات الحل:**

جا٤٥° جتا٤٥° + جا٣٠° جتا٦٠° - جتا$^{٢}$ ٣٠°

---

**٣ أثبت أن:** (أسوان ٢٠٢٢)

(أ) جتا٦٠° = ٢ جتا$^{٢}$ ٣٠° - ١

(ب) ظا$^{٢}$ ٦٠° - ظا$^{٢}$ ٤٥° = جا$^{٢}$ ٦٠° + جتا$^{٢}$ ٦٠° + ٢ جا٣٠°

---

**٤ أوجد قيمة س إذا كان:** (الأقصر ٢٠٢٣)

٤ س = جتا$^{٢}$ ٣٠° ظا$^{٢}$ ٣٠° ظا$^{٢}$ ٤٥°

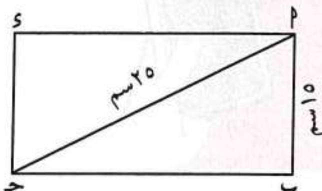
---

**٥ أوجد هـ حيث هـ قياس زاوية حـادة:** (الإسكندرية ٢٠٢٢)

جاهـ = جا٦٠° جتا٣٠° - جتا٦٠° جا٣٠°

---

**٦ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:** (البحيرة ٢٠٢٣)




أ ب حـ ء مستطيل فيـه : أ ب = ١٥سم ، أ حـ = ٢٥ سم

أوجـد: أولًا : ق (∠ أ حـ ب)

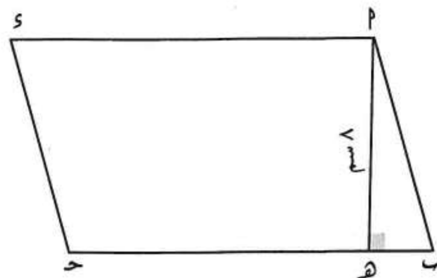
ثانيًا : مساحة سطح المستطيل أ ب حـ ء

**٧ الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:** (الوادى الجديد ٢٠٢٣)

أ ب جـ د متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦ سم$^{2}$ ،

ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

أهـ ⊥ ب جـ ، أهـ = ٨ سم




أوجد:

**أولًا:** طول أد

**ثانيًا:** ق (∠ ب)

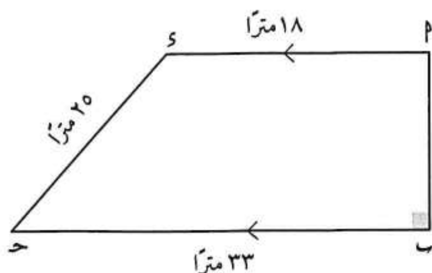
**ثالثًا:** طول أب لأقرب رقم عشرى واحد **(استخدم أكثر من طريقة)**

---

**٨** قطعة أرض على شكل شبه منحرف أ ب جـ د فيها:

أد // ب جـ ، ق (∠ ب) = ٩٠° ، أد = ١٨ مترًا ،

ب جـ = ٣٣ مترًا ، د جـ = ٢٥ مترًا




المطلـوب:

(أ) إيجـاد طول أب (ب) ق (∠ جـ)

(جـ) إذا أراد صاحب قطعة الأرض عمل نافورة دائرية الشكل داخلها، فما أكبر مساحة ممكنة لهذه النافورة؟

ثم **أوجد** مساحة الجزء المتبقى من قطعة الأرض. ($\pi \simeq 3,14$)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ جا ٣٠° جتا ٦٠° = .............. (جنوب سيناء ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

٢ إذا كان: جاهـ = ٠,٦٢١٤ فإن: ق (∠ هـ) ≃ .............. (لأقرب دقيقة) (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) ٣٨ َ ٥٥° (ب) ٢٥ َ ٣٨° (جـ) ٥٢ َ ٨٣° (د) ٥٢ َ ٤٨°

٣ ظا(س + ١٥)° = ١ فإن: س = ..............° (حيث س قياس زاوية حادة) (أسوان ٢٠٢٢)

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٦٠

٤ فى المثلث القائم الزاوية والمتساوى الساقين يكون ظل الزاوية الحادة مساويًا .............. (الدقهلية ٢٠١٦)

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

٥ إذا كان: جا (س + ٢٠) = $\frac{١}{٢}$ حيث (س + ٢٠) قياس زاوية حادة ،
فإن: ظا (٥٥ − س)° = .............. (الشرقية ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه: جا أ + جتا حـ = ١ فإن: ظا حـ = .............. (الفيوم ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) −١ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

---

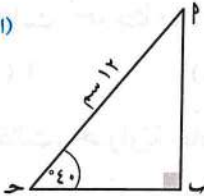
## ٢ أجب عن الآتى:

١ إذا كانت جا س° = ظا ٣٠° جا ٦٠° حيث س قياس زاوية حادة، فأوجد قيمة ٢ جتا س. (أسوان ٢٠٢٢)

٢ فى الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

ق(∠ حـ) = ٤٠° ، أ حـ = ١٢ سم أوجد:

(أ) طول $\overline{أب}$ لأقرب سم. (ب) طول $\overline{ب حـ}$ لأقرب سم

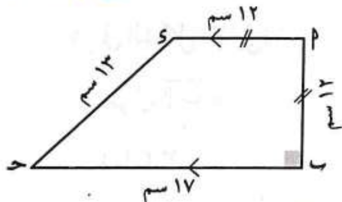



٣ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٢)

أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب فيه: $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$

إذا كان حـ ء = ١٣ سم ، أ ء = أ ب = ١٢سم ، ب حـ = ١٧ سم

فأوجد: (أ) ظا (∠ ء حـ ب) (ب) ق (∠ ء أ حـ) بالدرجات




٤ أثبت أن: جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠° − ظا ٤٥° (الشرقية ٢٠٢٤)

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ إذا كانت: ظا$\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ فإن: س = ..................

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) $٢\sqrt{٣}$

٢ إذا كانت: جتاهـ = ٠,٦٢١٧ فإن: هـ ≃ .................. (لأقرب دقيقة)

(أ) ٤٦° ٥٢َ (ب) ٥١° ٣٤َ (جـ) ٦٤° ٣٧َ (د) ٥٣° ٢٨َ

٣ ٢ جا ٣٠° ظا ٦٠° = .................. (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ٣ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٤ إذا كانت: ظاس = ١ فإن: ٢س = .................. (حيث س قياس زاوية حادة)

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٥ إذا كان: $\frac{\text{جا ٣٥°}}{\text{٢ جتا س}}$ = جا ٣٠° (حيث س قياس زاوية حادة) فإن: س= ..................

(أ) ٣٠° (ب) ٣٥° (جـ) ٦٠° (د) ٥٥°

٦ أ ب حـ △ متساوى الساقين وقائم الزاوية فى حـ فإن: ظا أ = ..................

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٣}$

٧ إذا كانت: س جتا ٦٠° = ظا ٤٥° فإن: س = .................. (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

٨ إذا كانت: حـ زاوية حادة ، وكان جا حـ = جتا حـ فإن: ظا حـ = .................. (الأقصر ٢٠٢٤)

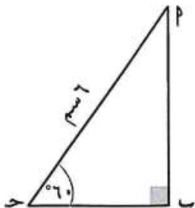
(أ) ١ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٩ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٤)

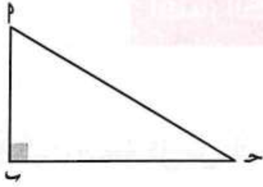
طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ..................سم

(أ) ٣ (ب) $٢\sqrt{٣}$

(جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٦}$



## ٢ أجب عما يأتى:



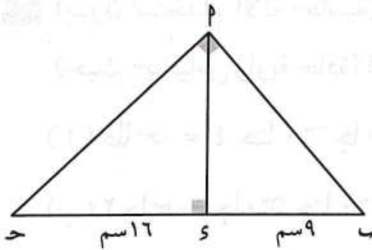

١ فى الشكل المقابل:

$\Delta$ ء ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ ء) = ٢ ق (∠ حـ)

**أوجد** قيمة المقدار: جتا$^2$ ء + ظا$^2$ حـ

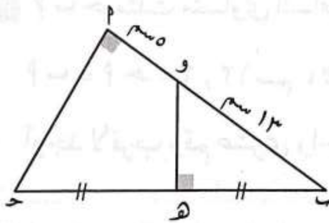
٢ إذا كان س قياس زاوية حادة : **فأوجد** قيمة س التى تحقق: **(الإسكندرية ٢٠٢٣)**

٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°




٣ فى الشكل المقابل: **(الفيوم ٢٠٢٤)**

**أوجد:** قيمة ظا ب ظا حـ




٤ فى الشكل المقابل:

ق (∠ ء ) = ٩٠° ، $\overline{\text{وهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$، ء و = ٥ سم ، ب و = ١٣ سم

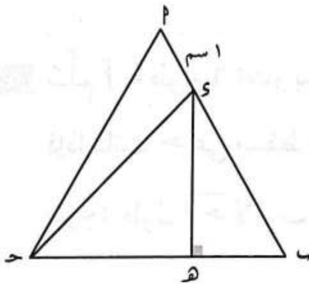
**أوجد بالبرهان** ظا(∠ ء حـ ب)

**إرشاد : نصل** $\overline{\text{و حـ}}$

٥ ء ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث ب حـ = ٣ سم ، ء حـ = ٤ سم **(المنوفية ٢٠٢٢)**

(أ) **أثبت أن:** جا$^2$ حـ + جتا$^2$ ء < ١

(ب) **أوجد:** ق (∠ ء) بالدرجات والدقائق والثوانى.




٦ فى الشكل المقابل: **(الإسماعيلية ٢٠١٩)**

ء ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ سم

، ء ∈ $\overline{\text{ء ب}}$ بحيث ء ء = ١ سم ، رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

**أوجد:** ظا(∠ ء حـ هـ)

٧ (بدون استخدام الآلة الحاسبة) **أثبت أن:** ٢ جتا$^2$ ٣٠° − ١ = ١ − ٢ جا$^2$ ٣٠°

١ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية، مبينًا خطوات الحل: (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

(أ) جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° (ب) ظا ٦٠° = $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠°}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠°}$

٢ (بدون استخدام الآلة الحاسبة) أوجد قيمة س

(حيث س قياس زاوية حادة) التى تحقق كلًا من:

(أ) ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠°

(ب) ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

٣ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه:

أ ب = أ ح = ١٢,٦ سم ، ق (∠ ح) = ٢٤ ´٨٤°

أوجد لأقرب رقم عشرى واحد: طول $\overline{\text{ب ح}}$

٤ أ ب ح ء شبه منحرف فيه: (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$ ، ق (∠ ب) = ٩٠°

فإذا كان: أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٦ سم ، ب ح = ١٠ سم

فأثبت أن: جتا (∠ ء ح ب) - ظا (∠ أ ح ب) = $\frac{١}{٢}$

٥ سُلَّم $\overline{\text{أ ب}}$ طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوى أ على حائط رأسى وطرفه السفلى ب على أرض أفقية، فإذا كانت ح هى مسقط نقطة أ على سطح الأرض، وكانت زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{\text{أ ح}}$ لأقرب رقم عشرى واحد. (الأقصر ٢٠٢٣)

الوحدة الخامسة 

# الهندسة التحليليـة

## أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

### الـــدرس الأول: البُعد بين نقطتين

- يوجد البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى المتعامد.
- يحل مسائل مختلفة عن البعد بين نقطتين.

### الـدرس الثانى: إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

- يوجد إحداثيَّى منتصف قطعة مستقيمة.
- يحل مسائل تتضمن إيجاد إحداثيَّى منتصف قطعة مستقيمة.

### الـدرس الثالث: ميل الخط المستقيم

- يتعرف ميل الخط المستقيم، ويوجد هذا الميل بمعلومية قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- يتعرف العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين وميلى المستقيمين المتعامدين.

### الـدرس الرابع: معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

- يتعرف كيفية إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات إذا علمت معادلة الخط المستقيم.
- يتعرف كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات.

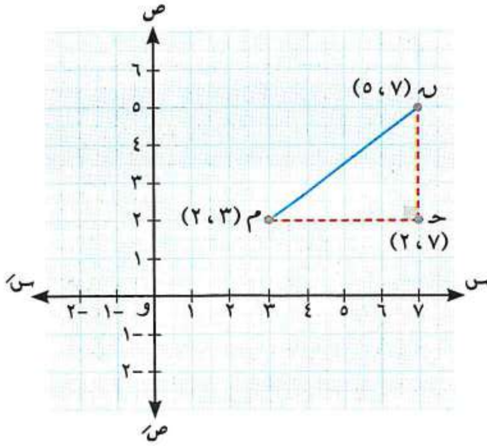

فديو الشرح

ذاكر الدرس ١

# البُعد بين نقطتين

## فكر وناقش

**فى الشكل المقابل نجد أن:**




- النقطتين: م (٣ ، ٢) ، حـ (٧ ، ٢)

لهما نفس الإحداثى الصادى ، فإن:

م حـ = | ٣ − ٧ | = | −٤ | = ٤ وحدات طول.

- النقطتين: حـ (٧ ، ٢) ، ن (٧ ، ٥)

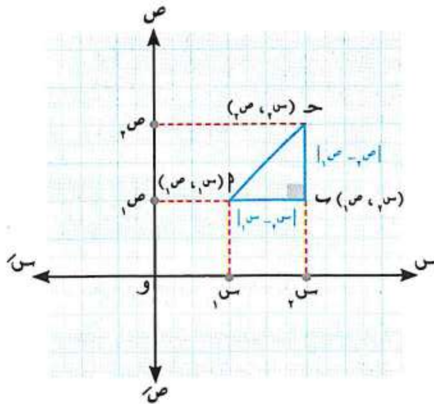
لهما نفس الإحداثى السينى ، فإن:

حـ ن = | ٥ − ٢ | = | ٣ | = ٣ وحدات طول.

- $\triangle$ م حـ ن قائم الزاوية فى حـ ، فإن:

م ن = $\sqrt{(\text{م حـ})^2 + (\text{حـ ن})^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$ = ٥ وحدات طول. (نظرية فيثاغورث)

## البُعد بين نقطتين:




**فى الشكل المقابل:** إذا كانت أ (س١ ، ص١) ، حـ (س٢ ، ص٢)

حيث أ ، حـ نقطتان فى المستوى الإحداثى

**نجد أن:** ب (س٢ ، ص١)

**ويكون:** ب حـ = |ص٢ − ص١| ، أ ب = |س٢ − س١|

- باستخدام نظرية فيثاغورث فى $\triangle$ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب:

$\because$ (أ حـ)$^2$ = (أ ب)$^2$ + (ب حـ)$^2$

$\therefore$ (أ حـ)$^2$ = (س٢ − س١)$^2$ + (ص٢ − ص١)$^2$

$\therefore$ أ حـ = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

**حيث إن:** (س٢ − س١)$^2$ هو مربع فرق السينات ،

(ص٢ − ص١)$^2$ هو مربع فرق الصادات

### لاحظ أن

- $|\text{س}_2 - \text{س}_1|^2 = (\text{س}_2 - \text{س}_1)^2$
- $|\text{ص}_2 - \text{ص}_1|^2 = (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2$
- $|\text{س}|^2 = \text{س}^2$

## قانون البُعد بين نقطتين

في المستوى الإحداثي ع × ع إذا كانت أ $(س_{١} ، ص_{١})$ ، ب $(س_{٢} ، ص_{٢})$،

فإن: البُعد بين النقطتين أ $(س_{١} ، ص_{١})$ ، ب $(س_{٢} ، ص_{٢})$ هو أ ب $= \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

أي أن: البُعـد بين أي نقطتيـــن $= \sqrt{(\text{فرق السينات})^{٢} + (\text{فرق الصادات})^{٢}}$

## مثـال ١

**أوجد البُعد بين النقطتين في كل مما يلي:**

١ أ $(-٥ ، ٠)$ ، ب $(٠ ، ١٢)$

٢ حـ $(-١ ، ٢)$ ، ء $(٢ ، -٢)$

٣ هـ $(١ ، ٤)$ ، و $(٢ ، -٣)$

٤ م $(٢ ، ٣)$ ، ل $(\frac{-٧}{٢} ، \frac{-٥}{٢})$

### الحـل

١ أ ب $= \sqrt{(-٥ - ٠)^{٢} + (٠ - ١٢)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$ وحدة طول

٢ حـ ء $= \sqrt{(-١ - ٢)^{٢} + (٢ + ٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات طول

٣ هـ و $= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (٤ + ٣)^{٢}} = \sqrt{١ + ٤٩} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

٤ م ل $= \sqrt{(٢ + \frac{٧}{٢})^{٢} + (٣ + \frac{٥}{٢})^{٢}} = \sqrt{\frac{١٢١}{٤} + \frac{١٢١}{٤}} = \sqrt{\frac{١٢١}{٤} \times ٢} = \frac{١١}{٢}\sqrt{٢} = ٥,٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

### سؤال ١

**أوجد البُعد بين النقطتين في كل مما يلي:**

١ أ $(٣ ، ٥)$ ، ب $(-٢ ، -٣)$

٢ حـ $(٦ ، ١)$ ، ء $(٨ ، ٥)$

٣ هـ $(-١ ، -٢)$ ، و $(٢ ، -٣)$

٤ ل $(٨,٣ ، ٥)$ ، م $(-٢,١ ، -٧)$

## مثال ٢

**أوجد البُعد بين النقطتين ؟ ، ب فى كل مما يلى:**

١ ؟ (١٥ ، ٤) ، ب (٦ ، ٤)　　　٢ ؟ (٢ ، -٣) ، ب (٢ ، ٥)

### الحل

١ ∵ البُعد بين نقطتين لهما نفس الإحداثى الصادى = |الفرق بين الإحداثيين السينيين|

∴ ؟ ب = |١٥ - ٦| = |٩| = ٩ وحدات طول

٢ ∵ البُعد بين نقطتين لهما نفس الإحداثى السينى = |الفرق بين الإحداثيين الصاديين|

∴ ؟ ب = |-٣ - ٥| = |-٨| = ٨ وحدات طول

## مثال ٣

**أوجد ما يأتى:**

١ البُعد بين النقطة ؟ ( ٢ ، -٣) ومحور السينات.　　٢ البُعد بين النقطة ب (-٤ ، ٢) ومحور الصادات.

٣ البُعد بين النقطة حـ (٦ ، ٨) ونقطة الأصل.

### الحل

١ ∵ البُعد بين النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ومحور السينات = | $ص_١$ |

∴ البُعد بين النقطة ؟ ومحور السينات = |-٣| = ٣ وحدات طول

٢ ∵ البُعد بين النقطة ($س_٢$ ، $ص_٢$) ومحور الصادات = |$س_٢$|

∴ البُعد بين النقطة ب ومحور الصادات = |-٤| = ٤ وحدات طول

٣ ∵ البُعد بين النقطة ($س_٣$ ، $ص_٣$) ونقطة الأصل و (٠ ، ٠) = $\sqrt{س_٣^٢ + ص_٣^٢}$

∴ البُعد بين النقطة حـ ونقطة الأصل = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$ = ١٠ وحدات طول

**لاحظ أن**

• البُعد بين نقطة ومستقيم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم.

**س؟ سؤال ٢**

١ **أوجد البُعد بين النقطتين ؟ ، ب فى كل مما يلى:**

( ١ ) ؟ (-٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٣)　　　(ب) ؟ (-١ ، ٤) ، ب (-١ ، ٥)

٢ **أوجد البُعد بين النقطة حـ (-٣ ، -٤) ونقطة الأصل.**

## مثال ٤

**أوجد قيم ص إذا كان البُعد بين النقطتين أ (٨ ، ٥) ، ب (٣ ، ص) يساوى ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول.**

**الحل**

∵ أ ب = ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ $\sqrt{(٣ - ٨)^{٢} + (ص - ٥)^{٢}}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ (بتربيع الطرفين)

∴ ٢٥ + $(ص - ٥)^{٢}$ = ٥٠

∴ $(ص - ٥)^{٢}$ = ٢٥ ∴ |ص - ٥| = ٥

∴ ص - ٥ = ٥ أو ص - ٥ = -٥

ص = ١٠ أو ص = صفر ∴ قيم ص هى ١٠ أو صفر

## مثال ٥

**أوجد قيمة ك إذا كان البُعد بين النقطتين أ (ك ، ٥) ، ب (٣ك - ١ ، ١) يساوى ٥ وحدات طول.**

**الحل**

∵ أ ب = ٥ وحدات طول ∴ $\sqrt{(٣ك - ١ - ك)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$ = ٥ (بتربيع الطرفين)

∴ $(٢ك - ١)^{٢}$ + ١٦ = ٢٥ ∴ $(٢ك - ١)^{٢}$ = ٩ ∴ $(٢ك - ١)^{٢} = (\pm ٣)^{٢}$

∴ ٢ك - ١ = ٣ أو ٢ك - ١ = -٣

∴ ٢ك = ٤ أو ٢ك = -٢

∴ ك = ٢ أو ك = -١ ∴ قيمة ك هى ٢ أو -١

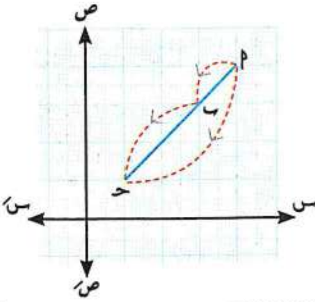
**سؤال ٣**

إذا كانت أ (٢ ، ك) ، ب (٣ ، -١) وكانت أ ب = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول فأوجد قيمة ك.

(البحيرة ٢٠٢٤)



## نقاط هامة




- إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط فى مستوى إحداثى متعامد،

وكـان : أ ب + ب حـ = أ حـ،

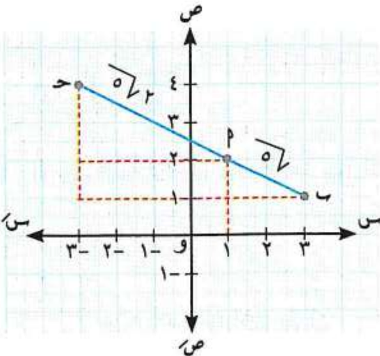
أى أن : أكبر الأبعاد = مجموع البُعدين الآخرين،

فإن : النقط أ ، ب ، حـ تكون على استقامة واحدة.

## مثـال ٦

**أثبـت أن النقط أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (−٣ ، ٤)**

**تقع على استقامة واحدة.**




**الحـل**

أ ب = $\sqrt{(٣-١)^{٢}+(١-٢)^{٢}} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

ب حـ = $\sqrt{(-٣-٣)^{٢}+(٤-١)^{٢}} = \sqrt{٣٦+٩} = \sqrt{٤٥}$

$= \sqrt{٩\times٥} = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طول

أ حـ = $\sqrt{(-٣-١)^{٢}+(٤-٢)^{٢}} = \sqrt{١٦+٤} = \sqrt{٢٠}$

$= \sqrt{٤\times٥} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

∵ أ ب + أ حـ = $\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} = ٣\sqrt{٥}$ = ب حـ

∴ ب حـ = أ ب + أ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة

### سؤال ٤

**أثبـت أن النقاط: أ (−٢ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٢) ، حـ (−٦ ، −١) تقـع على استقامـة واحدة.**



## نقاط هامة

- أى ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هى رءوس مثلث.
- **لإثبات أن النقط** ٢ ، ب ، حـ هى رءوس مثلث نوجد ٢ ب ، ب حـ ، ٢ حـ

فإذا كان: مجموع طولى أصغر ضلعين **أكبر من** طول الضلع الثالث كانت النقاط ٢ ، ب ، حـ **هى رءوس مثلث.**

## مثال ٧

**أثبت أن النقط ٢ (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٤) هى رءوس مثلث، وأوجد محيطه.**

**الحل**

٢ ب = |٣ − ٠| = ٣ وحدات طول ، ٢ حـ = |٤ − ٠| = ٤ وحدات طول

، ب حـ = $\sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٠ - ٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥ وحدات طول

∵ ٢ ب + ٢ حـ > ب حـ ∴ النقط ٢ ، ب ، حـ هى رءوس مثلث

∴ محيط △٢ب حـ = ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ وحدة طول

## لمعرفة نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه وبالنسبة لأطوال أضلاعه:

- لتعيين نوع المثلث ٢ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه حيث $\overline{٢حـ}$ أطول الأضلاع،

**نقارن بين** $(٢حـ)^٢$ ، $(٢ب)^٢ + (ب حـ)^٢$ كما يلى:

| | |
|---|---|
| ١ إذا كان: $(٢حـ)^٢ > (٢ب)^٢ + (ب حـ)^٢$ | فإن: المثلث منفرج الزاوية فى ب |
| ٢ إذا كان: $(٢حـ)^٢ = (٢ب)^٢ + (ب حـ)^٢$ | فإن: المثلث قائم الزاوية فى ب |
| ٣ إذا كان: $(٢حـ)^٢ < (٢ب)^٢ + (ب حـ)^٢$ | فإن: المثلث حاد الزوايا |

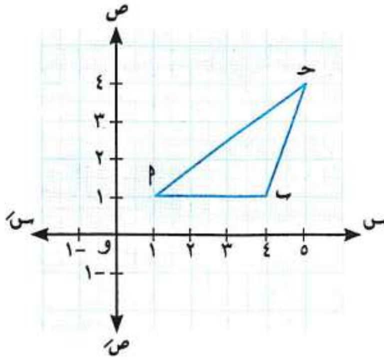
- لتعيين نوع المثلث بالنسبة لأطوال أضلاعه:

| | |
|---|---|
| ١ إذا كان: أطوال الأضلاع الثلاثة متساوية | فإن: المثلث متساوى الأضلاع |
| ٢ إذا كان: ضلعان منه فقط متساويين فى الطول | فإن: المثلث متساوى الساقين |
| ٣ إذا كان: أطوال الأضلاع الثلاثة مختلفة | فإن: المثلث مختلف الأضلاع |

## مثال ٨

**أثبت أن النقط ؋ (١ ، ١) ، ب (٤ ، ١) ، حـ (٥ ، ٤) رءوس مثلث منفرج الزاوية.**

**الحل**




$(\text{؋ب})^2 = (٤ - ١)^2 = ٩$

$(\text{بحـ})^2 = (٥ - ٤)^2 + (٤ - ١)^2 = ١٠$

$(\text{؋حـ})^2 = (٥-١)^2 + (٤ - ١)^2 = ٢٥$

$\because (\text{؋ب})^2 + (\text{بحـ})^2 = ١٩$

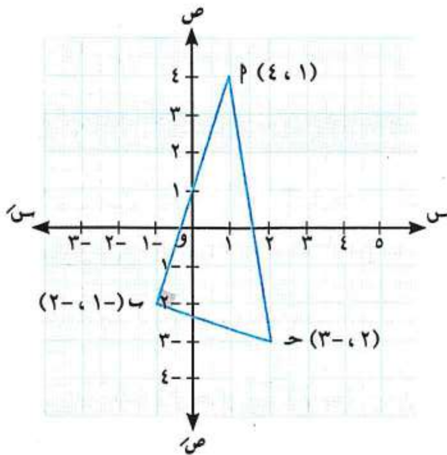
$\therefore (\text{؋حـ})^2 > (\text{؋ب})^2 + (\text{بحـ})^2$

$\therefore \Delta$ ؋ ب حـ منفرج الزاوية فى ب

## مثال ٩

**أثبت أن $\Delta$ ؋ ب حـ قائم الزاوية حيث ؋ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، حـ (٢ ، -٣) ثم أوجد مساحة سطحه.** (مطروح ٢٠٢٤)

**الحل**




$(\text{؋ب})^2 = (-١ - ١)^2 + (-٢ - ٤)^2 = ٤٠$

$(\text{بحـ})^2 = \left(٢ - (-١)\right)^2 + \left(-٣ - (-٢)\right)^2 = ١٠$

$(\text{؋حـ})^2 = (٢ - ١)^2 + (-٣ - ٤)^2 = ٥٠$

$\because (\text{؋ب})^2 + (\text{بحـ})^2 = ٤٠ + ١٠ = ٥٠$

$\therefore (\text{؋حـ})^2 = (\text{؋ب})^2 + (\text{بحـ})^2$

$\therefore$ ؋ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

مساحة $\Delta$ ؋ ب حـ $= \frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع $= \frac{١}{٢} \times$ ؋ب × ب حـ

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٤٠} \times \sqrt{١٠} = ١٠$ وحدات مربعة

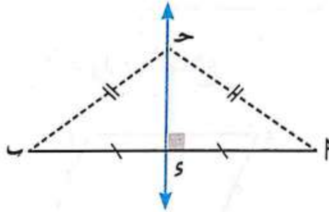
### سؤال ٥

**أثبت أن $\Delta$ ؋ ب حـ قائم الزاوية حيث ؋ (٦ ، ٢) ، ب (٤ ، -٢) ، حـ (٠ ، ٠)، ثم أوجد مساحة سطحه.**



## نقاط هامة

- محور تماثل قطعة مستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها.
- أى نقطة تقع على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفى القطعة والعكس صحيح.




**فمثلًا: فى الشكل المقابل:** إذا كان: $\overleftrightarrow{حـ ء}$ هو محور تماثل $\overline{أ ب}$

فإن: أء = ء ب ، حـ أ = حـ ب

**والعكس صحيح:** أى أنه إذا كان: حـ أ = حـ ب فإن: حـ ∈ محور تماثل $\overline{أ ب}$

## مثـال ١٠

**إذا كانت أ (٩ ، ٢) ، ب (١ ، ٦)، فأثبت أن النقطة حـ (٤ ، ٢) تقع على محور تماثل $\overline{أ ب}$**

**الحـل**

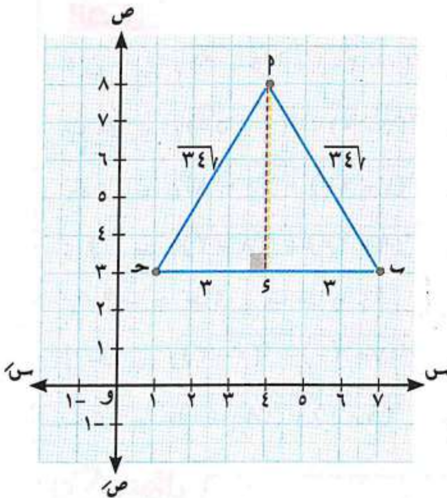
حـ أ = | ٩ − ٤ | = ٥ وحدات طول ، حـ ب = $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٢ - ٦)^٢}$ = ٥ وحدات طول

∵ حـ أ = حـ ب ، ∴ حـ تقع على محور تماثل $\overline{أ ب}$

## مثـال ١١

**أثبت أن △ أ ب حـ متساوى الساقين حيث أ (٤ ، ٨) ، ب (٧ ، ٣) ، حـ (١ ، ٣) ثم أوجد مساحة سطحه.**

**الحـل**




أ ب = $\sqrt{(٤ - ٧)^٢ + (٨ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول

ب حـ = | ٧ − ١ | = ٦ وحدات طول

أ حـ = $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٨ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول

∵ أ ب = أ حـ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول

∴ △ أ ب حـ متساوى الساقين

نفرض أن ء منتصف القاعدة $\overline{ب حـ}$

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ (٦) = ٣ وحدات طول

∵ أ ب = أ حـ ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

∴ أ ء = $\sqrt{(أ ب)^٢ - (ب ء)^٢}$ = $\sqrt{(\sqrt{٣٤})^٢ - (٣)^٢}$ = ٥ وحدات طول

مساحة سطح △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × أ ء = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥ = ١٥ وحدة مربعة



## نقاط هامة

• إذا كان: أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا، وباستخدام قانون البُعد بين نقطتين، فإن: الشكل أ ب حـ ء يكون:

**متوازى أضلاع**

عندما:

أ ب = حـ ء ،

ء أ = ب حـ

• كل ضلعين متقابلين فيه متساويان فى الطول.

**معينًا**

عندما:

أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ

• جميع أضلاعه متساوية فى الطول.

**مستطيلًا**

عندما:

أ ب = حـ ء ، أ ء = ب حـ ،

أ حـ = ب ء

• كل ضلعين متقابلين فيه متساويان، والقطران متساويان فى الطول.

**مربعًا**

عندما:

أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ ،

أ حـ = ب ء

• جميع أضلاعه متساوية فى الطول، والقطران متساويان فى الطول.

## مثال ١٢

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه: أ (٣ ، −٢) ، ب (−٥ ، ٠) ، حـ (٠ ، −٧) ، ء (٨ ، −٩)

**أثبت أن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع وأوجد طولى قطريه.**

### الحل

أ ب = √((٣ + ٥)² + (−٢ − ٠)²) = √(٦٤ + ٤) = √٦٨ وحدة طول

ب حـ = √((−٥ − ٠)² + (٠ + ٧)²) = √(٢٥ + ٤٩) = √٧٤ وحدة طول

حـ ء = √((٨ − ٠)² + (−٩ + ٧)²) = √(٦٤ + ٤) = √٦٨ وحدة طول

ء أ = √((٣ − ٨)² + (−٢ + ٩)²) = √(٢٥ + ٤٩) = √٧٤ وحدة طول

∵ أ ب = حـ ء ، ب حـ = ء أ ∴ الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

أ حـ = √((٣ − ٠)² + (−٢ + ٧)²) = √(٩ + ٢٥) = √٣٤ وحدة طول

ب ء = √((−٥ − ٨)² + (٠ + ٩)²) = √(١٦٩ + ٨١) = ٥√١٠ وحدة طول

## س؟ سؤال ٦

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه: أ (−٤ ، −٦) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (٨ ، ٦) ، ء (٢ ، −٤)

**أثبت أن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.**

## مثـال ١٣

أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (−٤ ، −١) ، ب (−٦ ، ٥) ، جـ (−٣ ، ٦) ، د (−١ ، ٠)

**أثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل، وأوجد مساحة سطحه.**

**الحـل**

أ ب = $\sqrt{(-٦+٤)^{٢}+(٥+١)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(-٣+٦)^{٢}+(٦-٥)^{٢}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

جـ د = $\sqrt{(-١+٣)^{٢}+(٠-٦)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

د أ = $\sqrt{(-٤+١)^{٢}+(-١-٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ أ ب = جـ د ، ب جـ = د أ (كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول) ———— (١)

ب د = $\sqrt{(-١+٦)^{٢}+(٠-٥)^{٢}} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

أ جـ = $\sqrt{(-٣+٤)^{٢}+(٦+١)^{٢}} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ ب د = أ جـ (القطران متساويان فى الطول) ———— (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض = $٢\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠} = ٢٠$ وحدة مربعة

## مثـال ١٤

أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢ ، ٤) ، ب (−٣ ، ٠) ، جـ (−٧ ، ٥) ، د (−٢ ، ٩)

**أثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع وأوجد مساحته.**

> **لاحظ أن**
> مساحة المربع
> = طول الضلع × نفسه
> أو
> = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

**الحـل**

أ ب = $\sqrt{(-٣-٢)^{٢}+(٠-٤)^{٢}} = \sqrt{٢٥+١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(-٧-(-٣))^{٢}+(٥-٠)^{٢}} = \sqrt{(-٤)^{٢}+(٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

جـ د = $\sqrt{(-٢-(-٧))^{٢}+(٩-٥)^{٢}} = \sqrt{(٥)^{٢}+(٤)^{٢}} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

د أ = $\sqrt{(٢-(-٢))^{٢}+(٤-٩)^{٢}} = \sqrt{(٤)^{٢}+(-٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

∴ أ ب = ب جـ = جـ د = د أ (أضلاعه الأربعة متساوية فى الطول) ———— (١)

أ جـ = $\sqrt{(-٧-٢)^{٢}+(٥-٤)^{٢}} = \sqrt{٨٢}$ وحدة طول

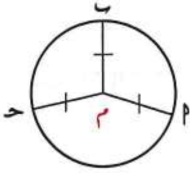
ب د = $\sqrt{(-٢-(-٣))^{٢}+(٩-٠)^{٢}} = \sqrt{٨٢}$ وحدة طول ∴ أ جـ = ب د ———— (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب جـ د مربع

مساحة المربع = $(\sqrt{٤١})^{٢} = ٤١$ وحدة مساحة **أو** مساحة المربع = $\frac{١}{٢} \times (\sqrt{٨٢})^{٢} = ٤١$ وحدة مساحة



## نقاط هامة




- لإثبات أن النقاط أ ، ب ، ﺣ تنتمى لدائرة طول نصف قطرها نق ومركزها م

نثبت أن: م أ = م ب = م ﺣ = نق

## مثال ١٥

أثبت أن: النقاط أ (٣ ، –١) ، ب (–٤ ، ٦) ، ﺣ (٢ ، –٢) تقع على دائرة مركزها النقطة م (–١ ، ٢)
ثم أوجد محيط هذه الدائرة بدلالة π . (أزهر الغربية ٢٠٢٤)

### الحل



**تذكر أن**

- محيط الدائرة = ٢ π نق
- مساحة سطح الدائرة = π $نق^2$
(حيث π النسبة التقريبية ، نق طول نصف القطر)

أ م = $\sqrt{(٣ + ١)^2 + (-١ - ٢)^2}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

ب م = $\sqrt{(-٤ + ١)^2 + (٦ - ٢)^2}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

ﺣ م = $\sqrt{(٢ + ١)^2 + (-٢ - ٢)^2}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

∵ أ م = ب م = ﺣ م = ٥ وحدات طول

∴ أ ، ب ، ﺣ تقع على دائرة مركزها م (–١ ، ٢) وطول نصف قطرها نق = ٥ وحدات طول

∵ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدات طول

## سؤال ٧

١ أثبت أن: النقاط س (٣ ، ٢) ، ص (٤ ، –٣) ، ع (–١ ، –٢) ، ل (–٢ ، ٣) هى رءوس معين، وأوجد مساحته.

٢ أثبت أن: النقاط أ (–٢ ، ٠) ، ب (٥ ، ١) ، ﺣ (٦ ، –٦) تقع على الدائرة التى مركزها م (٢ ، –٣)
ثم أوجد مساحة سطح هذه الدائرة بدلالة π . (الغربية ٢٠١٧)



تدريبات الأضــواء

## البُعد بين نقطتين:

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ البُعد بين النقطتين (٢ ، ٢) ، (-١ ، ٦) يساوى ............ وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

٢ طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٥ ، ١٢) يساوى ............ وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٣

٣ البُعد بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، -٤) يساوى ............ وحدة طول. (الوادى الجديد ٢٠٢٤)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٤ البُعد بين النقطتين (٣ ، م) ، (-١ ، م) يساوى ............ وحدة طول. (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ١٦ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ٤

٥ بُعد النقطة (٤ ، -٢) عن محور السينات يساوى ............ وحدة طول. (أزهر الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) $\sqrt{٥}$

٦ طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، -٤) على محور السينات يساوى ....... وحدة طول. (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) ٣ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ٥

٧ البُعد بين النقطة (٥ ، ظا$^{٢}$ ٦٠°) ومحور السينات هو ............ وحدة طول. (الأزهر الشريف ٢٠٢٤)

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) ٣ (د) $\sqrt{٣}$

٨ بُعد النقطة (-٥ ، ٤) عن محور الصادات يساوى ............ وحدة طول. (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) -٥

٩ البُعد بين النقطة ($\sqrt{٣}$ ، ١) ونقطة الأصل هو ............ وحدة طول.

(أ) ١٦ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ٤

١٠ البُعد العمودى بين المستقيمين س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ يساوى ........ وحدة طول. (الجيزة ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٣

١١ البُعد بين النقطة (٢ ، −٢) وصورتها بالانعكاس فى نقطة الأصل يساوى .......... وحدة طول.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ٦ $\sqrt{٢}$

١٢ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (−٢ ، ٣) وتمر بالنقطة (٢ ، −١) يساوى .......... وحدة طول. (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) ٥ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

١٣ محيط الدائرة التى مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) يساوى .......... وحدة طول. (الجيزة ٢٠١٧)

(أ) ٥ π (ب) ١٠ π (جـ) ٢٥ π (د) ٧ π

١٤ إذا كان البُعد بين المستقيمين ص = ك ، ص = −٢ يساوى وحدة طول واحدة، فإن إحدى قيم ك = ............ (الغربية ٢٠٢٢)

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٥ بُعد النقطة (ل ، −٤) عن محور الصادات يساوى ......... وحدة طول. (حيث ل ∈ ع) (دمياط ٢٠١٨)

(أ) ٤ (ب) ل (جـ) −٤ (د) |ل|

١٦ إذا كانت النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٧) هى رءوس المثلث أ ب حـ فإن محيطه = ............ وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٩

١٧ إذا كان أ ب حـ ء مربعًا فيه أ (٦ ، ٠)، حـ (٠ ، ٨) فإن مساحة المربع أ ب حـ ء = ......... وحدة مربعة. (الغربية ٢٠٢٢)

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٥ (د) ٢٥ $\sqrt{٢}$

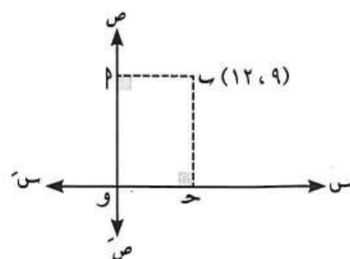
١٨ فى الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠١٧)

و أ ب حـ مستطيل فى مستوى إحداثى متعامد

فإن: أ حـ يساوى ........... وحدة طول.

(أ) ١٢ (ب) ٩

(جـ) ١٥ (د) ٢٥



١٩ إذا كان الشكل أ ب حـ ى معينًا حيث: أ (٧ ، ١) ، ب (١ ، ٩)

فإن محيط المعين يساوى ............ وحدة طول. (الدقهلية ٢٠٢٣)

(أ) ١٠ (ب) ١٤ (جـ) ٤٠ (د) ١٠٠

---

٢ إذا كانت أ (-١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، حـ (٠ ، ١) فأثبت أن أ ب = ب حـ (البحر الأحمر ٢٠٢٢)

---

٣ إذا كانت أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ٢) ، حـ (٥ ، ٤) فأثبت أن ب حـ = ٢ أ ب (الأقصر ٢٠١٦)

---

٤ تحرك أحمد ومروان من النقطة أ (٣ ، ٠) وصل أحمد إلى النقطة ب (-٣ ، ٤) بينما وصل مروان إلى النقطة حـ (-١ ، -٦) قارن بين المسافات التى قطعها كلٌّ منهما. (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

---

٥ إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٠ ، ٣) يساوى ٥ وحدات طول فأوجد قيم أ (المنيا ٢٠٢٤)

---

٦ إذا كانت النقطة أ (ك ، ١) على بُعدين متساويين من النقطتين ب (٤ ، ك) ، حـ (٣ ، ٣)

فأوجد قيمة ك (الجيزة ٢٠٢٣)

---

٧ إذا كانت النقطة أ (٦ ، م) تقع على محور تماثل $\overline{\text{حـ ى}}$ ، حيث حـ (٣ ، ١) ، ى (-٣ ، ٧) فأوجد قيمة م (الشرقية ٢٠٢٢)

---

٨ أثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، حـ (-٥ ، -٣) تقع على استقامة واحدة. (السويس ٢٠٢٣)

---

٩ بين نوع المثلث الذى رءوسه النقط أ (١ ، ١) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٣ ، ٤) من حيث أطوال أضلاعه.

(أسيوط ٢٠١٩)

---

١٠ أثبت أن المثلث الذى رءوسه أ (٣ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، حـ (١ ، ٣) متساوى الساقين ،

ثم أوجد مساحة سطحه. (أسوان ٢٠١٨)

---

١١ أ ب حـ مثلث فيه أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠) ، حـ (-٧ ، ٥) أثبت أن: المثلث أ ب حـ قائم الزاوية،

ثم أوجد مساحته. (الجيزة ٢٠٢٢)

---

١٢ أ ب حـ مثلث حيث أ (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (-٤ ، ٣) أوجد محيط △ أ ب حـ (الغربية ٢٠٢٣)

---

١٣ إذا كانت م (١ ، ٢) ، أ (١ ، ٥) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (-٢ ، ٢) أربع نقاط فى مستوى إحداثى واحد،

فهل النقاط أ ، ب ، حـ على أبعاد متساوية من النقطة م؟ وهل م ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

١٤ إذا كانت النقطة أ (٥ ، ٢) تقع على دائرة مركزها م (١ ، -١) فأوجد طول قطر هذه الدائرة. (الجيزة ٢٠١٨)

---

١٥ أثبت أن: النقط أ (-٣ ، -١) ، ب (٦ ، ٥) ، حـ (٢ ، ٤) ، ء (-٧ ، -٢) هى رءوس متوازى أضلاع.
(القليوبية ٢٠٢٢)

---

١٦ أثبت أن: النقط أ (٠ ، ١) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (١ ، ٨) ، ء (-٣ ، ٤) هى رءوس مستطيل،
ثم أوجد طول قطره.

---

١٧ أثبت أن: النقط أ (-١ ، ٤) ، ب (١ ، ١) ، حـ (-١ ، -٢) ، ء (-٣ ، ١) هى رءوس معين،
ثم أوجد: (أ) طول كلٍّ من $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ (ب) مساحة المعين أ ب حـ ء (السويس ٢٠٢٢)

---

١٨ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠) ، حـ (-٧ ، ٥) ، ء (-٢ ، ٩) (الإسماعيلية ٢٠١٧)
(أ) أثبت أن الشكل أ ب حـ ء مربع (ب) أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء

---

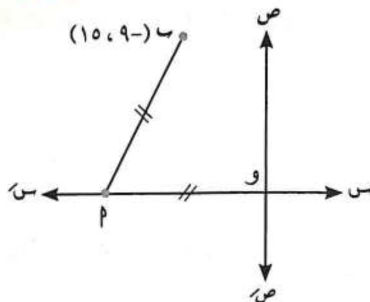
١٩ أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء مستطيل حيث أ (١ ، ١) ، ب (١ ، ٤) ، حـ (٥ ، ٤) ، ء (٥ ، ١)،
ثم أوجد مساحته. (الفيوم ٢٠٢٣)

---

٢٠ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة التى مركزها م حيث أ (٤ ، -١) ، ب (-٢ ، ٧)
أوجد طول نصف قطر الدائرة ومساحتها. (بنى سويف ٢٠٢٢)

## تفكير إبداعى TIMSS

٢١ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠١٨)
النقطة أ تقع على محور السينات،
أ و = أ ب حيث و نقطة الأصل
أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ب (-٩ ، ١٥)



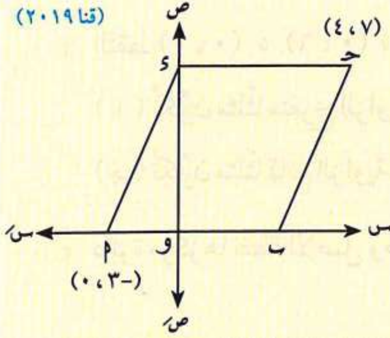
٢٢ فى الشكل المقابل:

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه:

أ (-٣ ، ٠) ، حـ (٧ ، ٤)

**أوجد** محيط متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

(قنا ٢٠١٩)




٢٣ إذا كان س (أ - ٥ ، -٢أ) ، ص (أ + ١ ، ٢أ) ،

**فأوجد** قيمة أ التى تجعل طول $\overline{\text{س ص}}$ = ١٠ وحدات طولية. (المنوفية ٢٠١٩)

٢٤ **أوجد** النقاط الواقعة على محور السينات التى تبعد ١٣ وحدة طول من النقطة (-٣ ، ٥)

٢٥ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع فيه : أ (٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤) **أوجد** إحداثيى الرأس حـ

٢٦ إذا كانت النقطة أ (س ، -١) ، ب (-٤ ، ص) ، حـ (٢ ، -٢) تقع على دائرة واحدة مركزها

م (-١ ، ٢) **فأوجد** قيمة كل من: س ، ص حيث س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ (الجيزة ٢٠٢٣)

٢٧ إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب حيث أ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (س ، ٤) **فاحسب**

قيمة س

## تدريبات الكتاب المدرسى

١ **أكمل ما يأتى:**

١ البُعد بين النقطة (-٣ ، ٤) ونقطة الأصل يساوى ............ (سوهاج ٢٠٢٤)

٢ البُعد بين النقطتين (-٥ ، ٠) ، (٠ ، ١٢) يساوى ............

٣ البُعد بين النقطتين (١٥ ، ٠) ، (٦ ، ٠) يساوى ............ (المنوفية ٢٠٢٤)

٤ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى ............ (المنيا ٢٠٢٤)

٥ إذا كان البُعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة فإن أ = ............

**٢ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ النقط (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٨): (بنى سويف ٢٠١٩)

(أ) تُكوِّن مثلثًا منفرج الزاوية. (ب) تُكوِّن مثلثًا حاد الزوايا.

(جـ) تُكوِّن مثلثًا قائم الزاوية. (د) تقع على استقامة واحدة.

٢ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول ، فأى من النقط الآتية تنتمى للدائرة؟ (المنيا ٢٠٢٤)

(أ) (١ ، ٢) (ب) (-٢ ، ١) (جـ) ($\sqrt{٣}$ ، ١) (د) ($\sqrt{٢}$ ، ١)

---

**٣ بيِّن: أى مجموعات النقط الآتية تقع على استقامة واحدة؟**

(أ) (١ ، ٤) ، (٣ ، -٢) ، (-٣ ، ١٦) (ب) (٧ ، ٠) ، (-٣ ، -٣) ، (٢٢ ، ٩)

(جـ) (-١ ، -٤) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٢) (د) (-١ ، -٤) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، -٢)

---

**٤ أجب عن الأسئلة الآتية:**

١ **أوجد قيمة أ فى كل من الحالتين الآتيتين:**

(أ) إذا كان البُعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (-٢ ، ٣) يساوى ٥ (الإسكندرية ٢٠٢٣)

(ب) إذا كان البُعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٣ أ -١ ، -٥) يساوى ١٣ (البحيرة ٢٠٢٤)

٢ إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب جـ **فأوجد قيمة س** (مطروح ٢٠٢٢)

٣ إذا كان بُعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوى ٢ $\sqrt{٥}$ **فأوجد قيمة س** (الجيزة ٢٠٢٤)

٤ **بيِّن نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى قياسات زواياه:**

(أ) أ (٣ ، ١٠) ، ب (٨ ، ٥) ، جـ (٥ ، ٢)

(ب) أ (١ ، -١) ، ب (٢ ، ١) ، جـ (-٣ ، -٢)

(جـ) أ (٣ ، ٣) ، ب (٤ ، -١) ، جـ (١ ، ١)

٥ **بيِّن نوع المثلث الذى رءوسه النقط:** أ (-٢ ، ٤) ، ب (٣ ، -١) ، جـ (٤ ، ٥) بالنسبة لأطوال أضلاعه. (الجيزة ٢٠٢٤)

٦ أثبتْ أن المثلث الذى رءوسه النقط: ٢ (٥ ، -٥) ، ب (-١ ، ٧) ، حـ (١٥ ، ١٥)
قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد مساحته. (كفر الشيخ ٢٠٢٣)

٧ ٢ ب حـ ء شكل رباعى حيث ٢ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، -٢) ، حـ (١ ، -١) ، ء (٠ ، ٤)،
أثبت أن الشكل ٢ ب حـ ء معين، ثم أوجد مساحته. (المنوفية ٢٠٢٣)

٨ أثبت أن النقط ٢ (-٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (-٤ ، ٢) ليست على استقامة واحدة،
وإذا كانت ء (-٩ ، ٤) فأثبت أن الشكل ٢ ب حـ ء متوازى أضلاع.

٩ فى الشكل المقابل، أوجد:

(٢) إحداثيات النقط التى تمثل مواقع منزل أحمد ومنزل سعيد وموقف السيارات والمدرسة.

(ب) بُعد منزل أحمد عن المدرسة.

(جـ) بُعد منزل سعيد عن المدرسة.

(د) أيهما أقرب من المدرسة: منزل أحمد أم منزل سعيد؟

(هـ) هل الطريقان ٢ ب، ب حـ متعامدان ؟ اذكر السبب.

١٠ إذا كانت ٢ ، ب، حـ ، ء أربع نقاط معلومة فى مستوى إحداثى متعامد؛ فحدد الشروط التى تجعل هذه النقط رءوسًا لكل من الأشكال الهندسية الآتية: (باستخدام قانون البعد بين النقطتين)

(٢) متوازى أضلاع (ب) مستطيل (جـ) معين (د) مربع

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ البُعد بين النقطتين (٢ ، ٠)، (٥، ٠) هو ............ وحدة طول. (القاهرة ٢٠١٧)

(أ) ٧ (ب) $\sqrt{٢٩}$ (جـ) $٣\frac{١}{٢}$ (د) ٣

٢ بُعد النقطة (-٥ ، -١٢) عن محور السينات يساوى ............ وحدة طول. (الأقصر ٢٠٢٤)

(أ) ١٣ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ١٧

٣ بُعد النقطة ($\sqrt{٢}$ ، ٤) عن نقطة الأصل يساوى ............ وحدة طول. (الشرقية ٢٠١٩)

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٢}$ (جـ) $٣\sqrt{٢}$ (د) $٤\sqrt{٢}$

٤ البُعد العمودى بين المستقيمين س = ٥ ، س + ٣ = صفر، يساوى ...... وحدة طول. (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) -٨ (د) ٤

٥ دائرة مركزها (٣ ، -٤) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول ، فأى من النقط الآتية تنتمى للدائرة؟ (الشرقية ٢٠٢٤)

(أ) (-٣، ٤) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٥، ٠) (د) (٠، ٤)

٦ أ ب حـ ء مستطيل فيه أ (-٤ ، -١)، حـ (٤ ، ٥) فإن طول $\overline{بء}$ = ........ وحدات طول. (الفيوم ٢٠٢٢)

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

---

## ٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ **أثبـت أن النقط** أ (٣ ، -١)، ب (-٤ ، ٦)، حـ (٢ ، -٢) تقع على الدائرة م ، حيث م (-١ ، ٢)، **وأوجد مساحة سطحها.** ($\pi \simeq ٣,١٤$) (المنوفية ٢٠٢٤)

٢ أ ب حـ مثلث، رءوسه أ (٢ ، ٨) ، ب (-١ ، ٤) ، حـ (٣ ، ١) **أثبـت أن:** (القاهرة ٢٠٢٣)

(أ) المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب (ب) المثلث أ ب حـ متساوى الساقين

٣ إذا كان البُعد بين النقطتين (أ ، ٥) ، (٣أ - ١ ، ١) يساوى ٥ وحدات طول، **فأوجد** قيمة أ (البحيرة ٢٠٢٤)

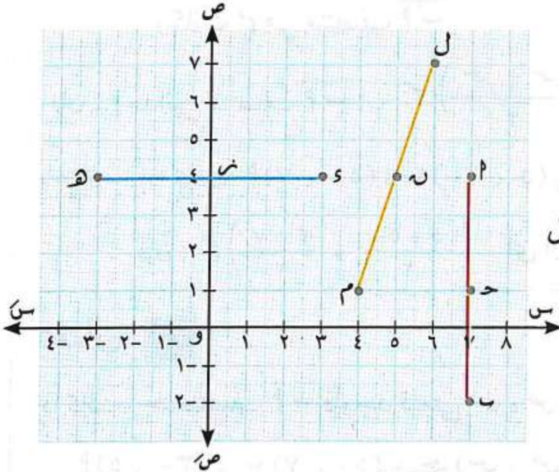


ذاكر الدرس ٢

# إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

فيديو الشرح

## فكر وناقش



فى الشكل المقابل:

١ ﻫ (٧ ، ٤) ، ب (٧ ، -٢) ، حـ (٧ ، ١)

على استقامة واحدة، من الشكل **نلاحظ أن:**

ﻫ حـ = ٣ وحدات طول ، ب حـ = ٣ وحدات طول

∴ النقطة حـ منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$

٢ ى (٣ ، ٤) ، ﻫ (-٣ ، ٤) ، ن منتصف $\overline{\text{ى ﻫ}}$

∴ ومن الرسم نجد إن إحداثيى ن (٠ ، ٤)

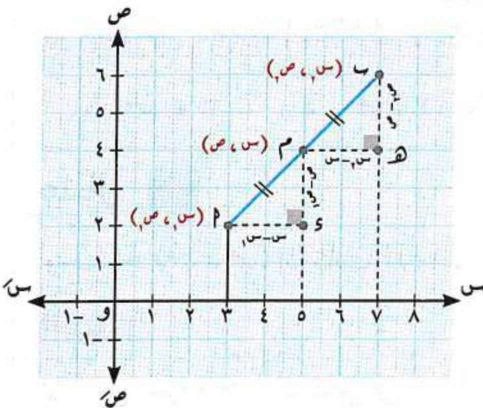
٣ ل (٦ ، ٧) ، م (٤ ، ١) ، من الرسم نجد أن: ں منتصف $\overline{\text{ل م}}$

∴ النقطة ں (٥ ، ٤) أى أن: $\left(\frac{٦+٤}{٢} ، \frac{٧+١}{٢}\right)$ أى: ں (٥ ، ٤)

## استنتاج إحداثيى منتصف المسافة بين نقطتين...

فى الشكل المقابل: $\overline{\text{ﻫ ب}}$ قطعة مستقيمة حيث:

ﻫ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) ، م (س ، ص) نقطة المنتصف.



من هندسة الشكل نجد أن: △ ب ﻫ م ≡ △ م ى ﻫ

∴ ﻫ م = ى ﻫ ، ب ﻫ = م ى

∴ س$_٢$ − س = س − س$_١$ ، ص$_٢$ − ص = ص − ص$_١$

∴ س$_١$ + س$_٢$ = ٢س ، ص$_١$ + ص$_٢$ = ٢ص

∴ $س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

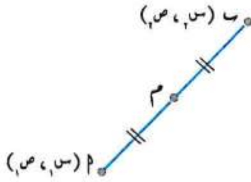
∴ م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

## تطبيقـات على منتصف قطعة مستقيمة

**قاعـدة**

- إذا كانت: $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة حيث أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

وكانت م هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$




فإن : إحداثيى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ : م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

**فمثلًا:** إذا كانت: أ (٧ ، –٥) ، ب (–٣ ، ٥) وكانت م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

فإن : م $\left(\frac{٧ - ٣}{٢} ، \frac{-٥ + ٥}{٢}\right)$ **أى أن:** م (٢ ، ٠)

## مثـال ١

إذا كانت: حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ **فأوجد قيمتى س ، ص فى كل من الحالات الآتيـة:**

١ أ (٥ ، –٣) ، ب (٧ ، –٥) ، حـ (س ، ص)

٢ أ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، حـ (٤ ، ٦)

٣ أ (–٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١) ، حـ (س ، –٣) **(البحيرة ٢٠٢٣)**

**الحـل**

١ ∵ (س ، ص) = $\left(\frac{٥ + ٧}{٢} ، \frac{-٣ - ٥}{٢}\right)$ = (٦ ، –٤) ∴ س = ٦ ، ص = –٤

٢ ∵ (٤ ، ٦) = $\left(\frac{س + ٦}{٢} ، \frac{ص + ٣}{٢}\right)$

∴ س + ٦ = ٨ ، ص + ٣ = ١٢ ∴ س = ٢ ، ص = ٩

٣ ∵ (س ، –٣) = $\left(\frac{-٣ + ٩}{٢} ، \frac{ص + ١١}{٢}\right)$ = $\left(٣ ، \frac{ص + ١١}{٢}\right)$

∴ س = ٣ ، ص + ١١ = –٦ ∴ س = ٣ ، ص = –١٧

## مثـال ٢

أوجـد حـ (س ، ص) إذا كانت أ (–١ ، –٢) هى صورة ب (٧ ، –٤) بالانعكاس فى حـ

**الحـل**

∵ أ هى صورة ب بالانعكاس فى حـ ∴ حـ هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ حـ $\left(\frac{(-١) + ٧}{٢} ، \frac{(-٢) + (-٤)}{٢}\right)$ ∴ حـ (٣ ، –٣)

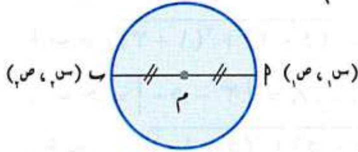


**نقاط هامة**

- فى أى دائرة يكون مركزها هو إحداثيا منتصف أى قطر فيها.

**فمثلًا:** فى الدائرة م يكون إحداثيا نقطة م $\left( \frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

ويكون : نق = أم = م ب




## مثال ٣

إذا كان: $\overline{أب}$ **قطرًا فى الدائرة التى مركزها م** وكانت أ (–٤ ، ٦) ، ب (٢ ، –٢) **فأوجد:**

١ إحداثيي مركز الدائرة.

٢ محيط الدائرة ومساحة سطحها بدلالة π.

**لاحظ أن**

- يمكن الحصول على نق بطريقة أخرى من العلاقة: نق = $\frac{١}{٢}$ أب

$نق = \frac{١}{٢} \sqrt{(-٤ - ٢)^٢ + (٦ + ٢)^٢}$

= ٥ وحدات طول.

**الحـل**

١ ∵ م منتصف $\overline{أب}$

∴ م $\left( \frac{-٤ + ٢}{٢} ، \frac{٦ - ٢}{٢} \right)$ ∴ م (–١ ، ٢)

٢ نق = م أ = $\sqrt{(-٤ + ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢}$ = ٥ وحدات طول.

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول.

مساحة سطح الدائرة = π $نق^٢$ = π $(٥)^٢$ = ٢٥ π وحدة مربعة.

**سؤال ١**

١ **أوجد:** إحداثيى نقطة م منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ، –٥) ، ب (–٣ ، ٣)

٢ إذا كان: أ (س ، ١) ، ب (–٣ ، ص) ، حـ (١ ، ٢) ،

وكانت النقطة حـ هى منتصف $\overline{أب}$ ، **فأوجد قيمة كلٍّ من:** س ، ص

٣ إذا كان: $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة التى مركزها م ، وكانت أ (٤ ، ١) ، ب (٦ ، ٣) **فأوجد:**

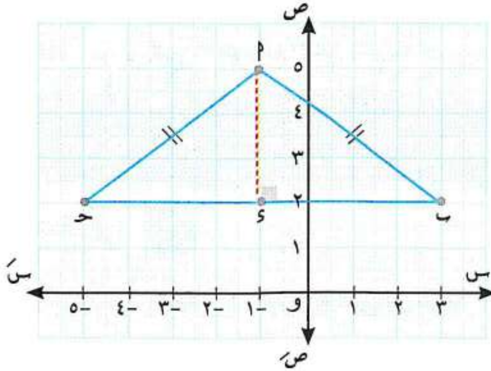
( أ ) إحداثيى مركز هذه الدائرة. (ب) مساحة سطح هذه الدائرة بدلالة π.

## مثـال ٤

**أثبت أن النقط:** أ (−١ ، ٥) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (−٥ ، ٢)

هى رءوس مثلث متساوى الساقين، وأوجد مساحة سطحه.

**الحـل**




أ ب = $\sqrt{(٣ + ١)^{٢} + (٢ - ٥)^{٢}}$ = ٥ وحدات طول.

، ب حـ = | −٥ − ٣ | = ٨ وحدات طول.

، أ حـ = $\sqrt{(-١ + ٥)^{٢} + (٥ - ٢)^{٢}}$ = ٥ وحدات طول.

∵ أ ب = أ حـ ∴ $\Delta$ أ ب حـ متساوى الساقين.

نفرض أن: ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ء $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{٢ + ٢}{٢}\right)$ ∴ ء (−١ ، ٢)

∵ أ ب = أ حـ ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ∵ أ ء = | ٥ − ٢ | = ٣ وحدات طول.

∴ مساحة سطح $\Delta$ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × أ ء = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٣ = ١٢ وحدة مربعة.

## مثـال ٥

**فى الشكل المقابل:** إذا كانت: حـ (٣ ، ٤) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ **فأوجـد:**

١ محيط $\Delta$ و أ ب ٢ مساحة المثلث و أ ب

**الحـل**

∵ النقطة أ تقع على محور السينات، النقطة ب تقع على محور الصادات

نفرض أن: أ (س ، ٠) ، ب (٠ ، ص)

∵ حـ (٣ ، ٤) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ (٣ ، ٤) = $\left(\frac{س + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص}{٢}\right)$

∴ $\frac{س}{٢}$ = ٣ ، $\frac{ص}{٢}$ = ٤

∴ س = ٦ ، ص = ٨

∴ أ (٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٨) ∴ أ ب = $\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}}$ = ١٠ وحدات طول.

١ محيط $\Delta$ و أ ب = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ وحدة طول. ٢ مساحة $\Delta$ و أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ وحدة مربعة.

### سؤال ٢

**أثبت أن المثلث الذى رءوسه النقط:** أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (−٥ ، ١) متساوى الساقين **وأوجد مساحته.**

## مثـال ٦

**إذا كانت: س (–١ ، ٣) ، ص (٧ ، ٧) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{سص}$ إلى أربعة أجزاء متساوية.**

**الحـل**

بفرض أن: النقط التى تقسم $\overline{سص}$ إلى أربعة أجزاء متساوية هى ﻫ ، ب ، حـ كما بالشكل التالى:




منتصف $\overline{سص}$ هو النقطة ب $\left(\frac{-١ + ٧}{٢} ، \frac{٣ + ٧}{٢}\right)$ ∴ ب (٣ ، ٥)

منتصف $\overline{سب}$ هو النقطة ﻫ $\left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}\right)$ ∴ ﻫ (١ ، ٤)

منتصف $\overline{بص}$ هو النقطة حـ $\left(\frac{٧ + ٣}{٢} ، \frac{٧ + ٥}{٢}\right)$ ∴ حـ (٥ ، ٦)


**نقاط هامة**

- إذا كان ﻫ ب حـ ى شكلًا رباعيًا وباستخدام إحداثيى منتصف قطعة مستقيمة لإثبات أن:

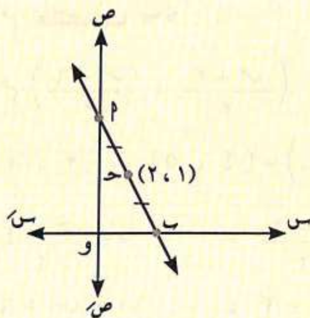
١ ﻫ ب حـ ى متوازى أضلاع نثبت أن: نقطة منتصف $\overline{ﻫحـ}$ = نقطة منتصف $\overline{بى}$

٢ ﻫ ب حـ ى معيـن نثبـت أن : نقطة منتصف $\overline{ﻫحـ}$ = نقطة منتصف $\overline{بى}$ ، ﻫ ب = ب حـ

٣ ﻫ ب حـ ى مستطيل نثبت أن : نقطة منتصف $\overline{ﻫحـ}$ = نقطة منتصف $\overline{بى}$ ، ﻫ حـ = ب ى

٤ ﻫ ب حـ ى مربــع نثبـت أن : نقطة منتصف $\overline{ﻫحـ}$ = نقطة منتصف $\overline{بى}$ ، ﻫ ب = ب حـ ، ﻫ حـ = ب ى

**سؤال ٣**




**فى الشكل المقابل:**

إذا كانت: حـ (١ ، ٢) منتصف $\overline{ﻫب}$ فأوجد ما يأتى:

١ طول $\overline{ﻫب}$ ٢ مساحة المثلث و ﻫ ب

## مثال ٧

**أثبت أن النقط: أ (٤ ، −١) ، ب (−٤ ، ١) ، حـ (٠ ، −٧) ، ء (٨ ، −٩) هي رءوس متوازي أضلاع.**

**الحـل**

∵ قطرا الشكل الرباعي أ ب حـ ء هما $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

∴ نقطة منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ هي $\left(\frac{٤ + ٠}{٢} ، \frac{-١ + (-٧)}{٢}\right)$ = (٢ ، −٤)

نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ هي $\left(\frac{-٤ + ٨}{٢} ، \frac{١ + (-٩)}{٢}\right)$ = (٢ ، −٤)

∴ نقطة منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ هي نفسها نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

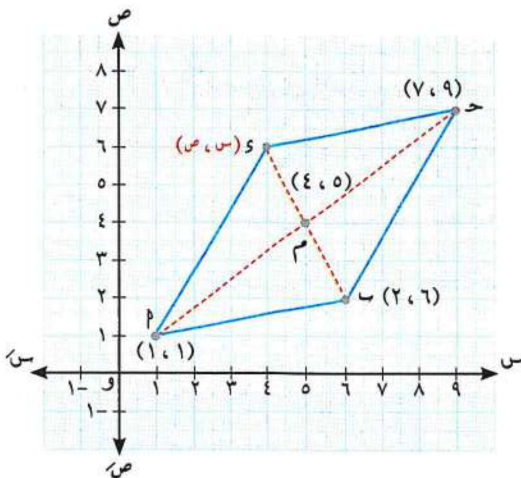
∴ القطران ينصف كل منهما الآخر. ∴ أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

**لاحظ أن**
- يمكن الحل باستخدام قانون البعد بين نقطتين.

## مثال ٨

**أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه: أ (١ ، ١) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (٩ ، ٧) أوجد إحداثيي نقطة ء**

**الحـل**




نفرض أن: ء (س ، ص)

وحيث إن القطرين يتقاطعان في نقطة م

∵ م منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ م $\left(\frac{٩ + ١}{٢} ، \frac{٧ + ١}{٢}\right)$

∴ م (٥ ، ٤) ——— ①

∵ م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ م $\left(\frac{٦ + س}{٢} ، \frac{٢ + ص}{٢}\right)$ ——— ②

من ① ، ② ∴ (٥ ، ٤) = $\left(\frac{٦ + س}{٢} ، \frac{٢ + ص}{٢}\right)$

∴ $\frac{٦ + س}{٢}$ = ٥ ، $\frac{٢ + ص}{٢}$ = ٤

∴ ٦ + س = ١٠ ، ٢ + ص = ٨

∴ س = ١٠ − ٦ = ٤ ، ص = ٨ − ٢ = ٦ ∴ ء (٤ ، ٦)

## مثال ٩

**أثبت أن النقط: أ (٥ ، ٤) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٢ ، ٢) هى رءوس مثلث قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب حـ ء مستطيلًا.**

**الحل**

∵ أ ب = | ٤ − ٢ | = ٢ وحدة طول ، ب حـ = |٥ − ٢| = ٣ وحدات طول.

، أ حـ = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٢ - ٤)^٢}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

∵ $(أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢$ = ٤ + ٩ = ١٣ = $(أ حـ)^٢$

∴ △أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

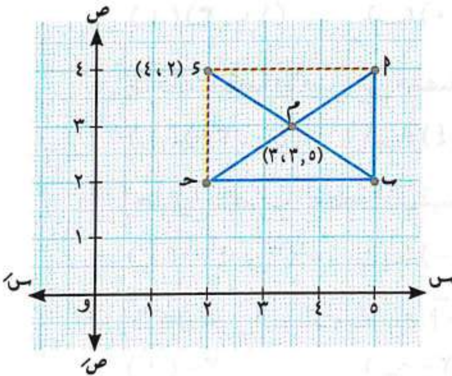
**لاحظ أن**

- المستطيل هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة.

وبفرض أن: ء (س ، ص) بحيث يكون الشكل أ ب حـ ء مستطيلًا،

∴ $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ينصف كل منهما الآخر.

∴ نقطة منتصف $\overline{أ حـ}$ = نقطة منتصف $\overline{ب ء}$




∴ $\left(\frac{٥ + ٢}{٢} ، \frac{٤ + ٢}{٢}\right) = \left(\frac{س + ٥}{٢} ، \frac{ص + ٢}{٢}\right)$

∴ $\left(\frac{٧}{٢} ، ٣\right) = \left(\frac{س + ٥}{٢} ، \frac{ص + ٢}{٢}\right)$

∴ $\frac{س + ٥}{٢} = \frac{٧}{٢}$ ، $\frac{ص + ٢}{٢} = ٣$

∴ س + ٥ = ٧ ، ص + ٢ = ٦

∴ س = ٢ ، ص = ٤ ∴ ء (٢ ، ٤)

### سؤال ٤

**أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث إن أ (٢ ، ٥)، ب (٤ ، −٥)، حـ (٠ ، −٣) أوجد:**

١ إحداثيى نقطة تلاقى القطرين.

٢ إحداثيى نقطة ء



أسئلة تفاعلية

# تدرّب الدرس ٢ إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

▲ تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

## تدريبات الأضـــواء

### تطبيقـات على منتصف قطعة مستقيمة:

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت ؟ (٥ ، ٧) ، ب (١ ، −١) فإن النقطة التى تقع فى منتصف ؟ب هى ............ (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٣ ، ٤)

٢ إحداثيا نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ؟ب حيث ؟ (٥ ، ٢) ، ب (−١ ، ٨) هما ................

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٣ ، ٥) (د) (٤ ، ١٠)

٣ إذا كانت م (٣ ، ٢) هى منتصف ؟ب حيث ؟ (٧ ، ٥) ، ب (−١ ، ص) فإن ص = ................

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٣

٤ إذا كانت م (−١ ، ٢) هى منتصف هـ ن وكانت هـ (٨ ، ١) فإن إحداثيى النقطة ن ................

(أ) (٣ ، ١٠) (ب) (١٠ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ١٠) (د) (−١٠ ، ٣)

٥ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف ؟ب حيث ؟ (٣ ، −٤) فإن النقطة ب هى ............ (أسيوط ٢٠١٨)

(أ) (−٣ ، −٤) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٦ إحداثيا منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة (٨ ، −٦) ونقطة الأصل هما ............

(أ) (−٤ ، ٣) (ب) (−٨ ، ٦) (جـ) (٨ ، −٦) (د) (٤ ، −٣)

٧ إذا كان محور السينات ينصف ؟ب حيث ؟ (٣ ، ٢) ، ب (س ، ص) فإن ص = .......... (الغربية ٢٠٢٣)

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ إذا كانت (٣ ، −١) هى منتصف ؟ب حيث ؟ (س ، ٢) ، ب (١٠ ، ص) فإن س − ص = ............

(أ) صفر (ب) −٨ (جـ) ٢ (د) −٢

٩ إذا كانت النقطة حـ (−٣ ، ص) منتصف ؟ب حيث ؟ (س ، −٦) ، ب (٩ ، −١٢)

فإن ص − س = .......... (الأقصر ٢٠١٩)

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) −١٨

١٠ إذا كانت النقطة (٢ ، −١) هى منتصف ؟ب حيث ؟ (س ، ٢) ، ب (٨ ، ص)

فإن س + ص = ........ (الدقهلية ٢٠١٨)

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) −٤ (د) −٨

١١ أ ب قطر فى دائرة مركزها م ، حيث أ (٢ ، ٤) ، ب (-٢ ، ٠) فإن إحداثيى النقطة م هى ..........
(بنى سويف ٢٠٢٠)

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، ٢)

١٢ إذا كان أ ب حـ ء مربعًا ، أ (٣ ، ٤) ، حـ (٥ ، ٦) فإن نقطة تقاطع قطريه هى .......... (المنيا ٢٠١٨)

(أ) (٨ ، ١٠) (ب) (١٠ ، ٨) (جـ) (٤ ، ٥) (د) (١٥ ، ٢٤)

١٣ إذا كانت نقطة الأصل منتصف أ ب حيث أ (ل ، ٢م + ١) ، ب (٣ ، -٥) فإن: (ل ، م) = ........

(أ) (٣ ، -٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (-٣ ، ٢) (د) (-٣ ، -٣)

١٤ إذا كانت النقطة حـ (ك - ٢ ، م) هى منتصف أ ب حيث أ (-١ ، ٣) ، ب (٣ ، -٥)

فإن (ك ، م) = .............. (الإسماعيلية ٢٠١٣)

(أ) (٤ ، -٢) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٤ ، -١) (د) (٣ ، -١)

١٥ إذا كانت النقطة (ع ، ل) هى منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها (س ، ٨) ، (ص ، ٢)

وكان: س + ص = -٤ فإن: ع + ل = ..............

(أ) -٤ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) -١٠

١٦ النقطة (٤ ، ٦) هى صورة النقطة (-٢ ، ٢) بالانعكاس فى النقطة ..............

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (-١ ، -٤) (جـ) (١ ، ٤) (د) (٤ ، ١)

---

٢ **أوجد** قيمتى س ، ص إذا كانت النقطة (٣ ، -٢) هى نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة أ ب

حيث أ (س ، ٢) ، ب (٣ ، ص) (كفر الشيخ ٢٠٢٣)

---

٣ إذا كانت أ (٢ ، ٣) هى منتصف ب حـ حيث حـ (-١ ، ٣) **فأوجد** إحداثيى نقطة ب (سوهاج ٢٠٢٠)

---

٤ إذا كانت حـ منتصف أ ب حيث أ (٥ ، -٢) ، ب (س ، -٤) ، حـ (٤ ، ص)، **فأوجد** قيمتى س ، ص

---

٥ **أوجد قيمة كل من أ ، ب التى تحقق أن:**

النقطة (٢أ - ٣ ، أ - ب) هى منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها (٧ ، -١) ، (٣ ، ٧) (الشرقية ٢٠٢٤)

---

٦ أ ب قطر فى دائرة م فإذا كانت: ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧)،

**فأوجد** إحداثيى النقطة أ **ثم أوجد** محيط الدائرة. (الغربية ٢٠٢٣)

---

٧ إذا كان أ ب قطرًا فى الدائرة م حيث أ (٤ ، -١) ، ب (-٢ ، ٧) ، **فأوجد** إحداثيى م (مركز الدائرة)

وطول نصف قطر هذه الدائرة. (الأقصر ٢٠٢٤)

٨ ﻫ ب ﺣ مثلث فيه ﻫ (١ ، ١) ، ب (٣ ، ١) ، ﺣ (١ ، ٣) أثبت أن: المثلث ﻫ ب ﺣ متساوى الساقين، وأوجد مساحته. (الدقهلية ٢٠٢٤)

---

٩ ﻫ ب ﺣ ء متوازى أضلاع حيث ﻫ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥) ، ﺣ (٠ ، −٣)
أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه، وأوجد إحداثيى نقطة ء (الغربية ٢٠٢٤)

---

١٠ $\overline{ﻫء}$ متوسط فى △ ﻫ ب ﺣ ، م منتصف $\overline{ﻫء}$ حيث م (٠ ، ٦) ، ب (٣ ، ٢) ، ﺣ (−٣ ، ٦)
أوجد إحداثيى نقطة ﻫ (كفر الشيخ ٢٠١٧)

---

١١ ﻫ ب ﺣ ء متوازى أضلاع، فيه ﻫ (س ، ٢) ، ب (٣ ، ٨) ، ﺣ (٩ ، ١٠) ، ء (٧ ، ٤)
أوجد قيمة س (البحيرة ٢٠١٦)

---

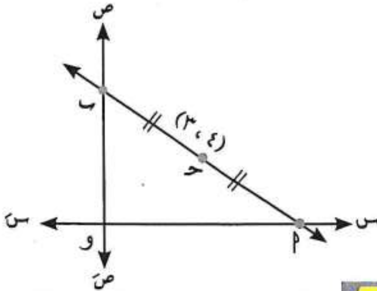
١٢ ﻫ ب ﺣ ء مستطيل، م نقطة تقاطع قطريه فإذا كان ﻫ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، −٤) ، ﺣ (−٤ ، ٢)
فأوجد إحداثيات النقطتين م ، ء (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

---

١٣ إذا كانت النقطة ﺣ (٤ ، ص) هى منتصف $\overline{ﻫب}$ حيث ﻫ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ٥) فأوجد كل من:
(أ) س + ص (قنا ٢٠٢٣) (ب) س ص (سوهاج ٢٠٢٢)

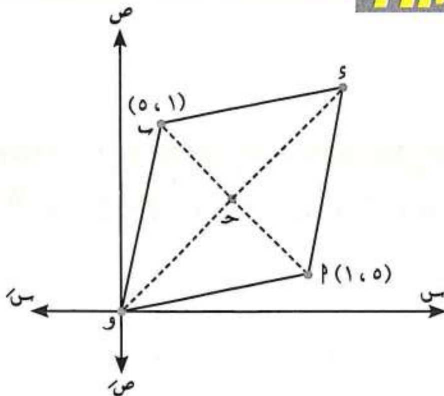
---

١٤ فى الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠٢٢)
إذا كانت النقطة ﺣ (٤ ، ٣) تقع فى منتصف $\overline{ﻫب}$
فأوجد: إحداثيى كل من ﻫ ، ب
ثم احسب محيط △ ﻫ و ب




---

تفكير إبداعى TIMSS




١٥ فى الشكل المقابل:
و ﻫ ء ب متوازى أضلاع مرسوم فى مستوى الإحداثيات
تقاطع قطراه فى ﺣ ، (و) نقطة الأصل
فإذا كان: ﻫ (٥ ، ١) ، ب (١ ، ٥)
(أ) فأوجد إحداثى كلٍّ من النقطتين ﺣ ، ء
(ب) وأثبت أن و ﻫ ء ب معين.

---

١٦ أوجد أطوال متوسطات المثلث الذى رءوسه ﻫ (٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠) ، ﺣ (٤ ، ٤)

## تدريبات الكتاب المدرسى

**١ أكمل ما يأتى:**

١ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ، −٢)

فإن إحداثيي النقطة ب هما ............

٢ إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء أربـع نقاط على استقامة واحدة ، وكان أ ب = ب حـ = حـ ء ،

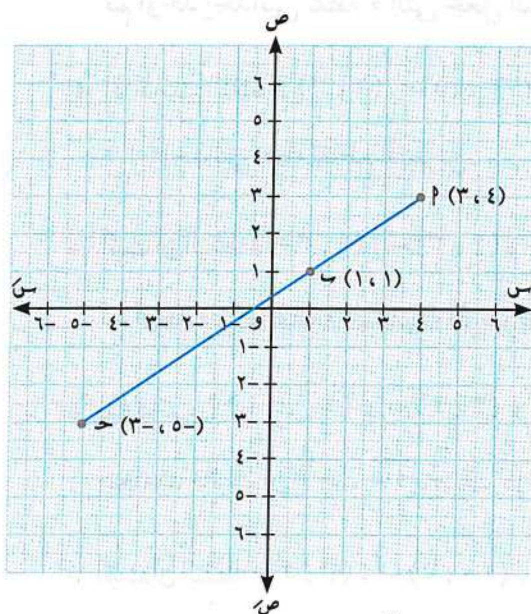
أ (١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ١) فأوجد:

**أولًا**: إحداثيى النقطة ب ( ........ ، ........ ) **ثانيًا**: إحداثيى النقطة ء ( ........ ، ........ )

٣ $\overline{أء}$ متوسط فى △ أ ب حـ ، م منتصف $\overline{أء}$ حيث أ (٠ ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (−٣ ، ٦) أوجـد:

**أولًا**: إحداثيى النقطة ء ( ........ ، ........ ) **ثانيًا**: إحداثيى النقطة م ( ........ ، ........ )

تحقق بتعيين إحداثيات النقط.




٤ **لإثبـات أن النقط:** أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، حـ (−٥ ، −٣) تقع على استقامة واحدة أكمل:

أ ب = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (١ - ٣)^٢}$ = ........

ب حـ = $\sqrt{(-٥ - ١)^٢ + (-٣ - ١)^٢}$ = ........

أ حـ = $\sqrt{(-٥ - ٤)^٢ + (-٣ - ٣)^٢}$ = ........

∴ أ ب + ب حـ = ..... + ..... = ........

∵ أ ب + ..... = أ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

٥ **أوجد إحداثيى نقطة حـ حيث حـ منتصف $\overline{أب}$ فى الحالات الآتية:**

(١) أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠) ، حـ ( ...... ، ...... )

(٢) أ (٧ ، −٥) ، ب (−٣ ، ٥) ، حـ ( ...... ، ...... )

(٣) أ (−٣ ، ٦) ، ب (٣ ، −٦) ، حـ ( ...... ، ...... )

(٤) أ (٧ ، −٦) ، ب (−١ ، ٠) ، حـ ( ...... ، ...... )

٢ ١ إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد س ، ص فى كلٍّ من الحالات الآتية:

(١) أ(١ ، ٥) ، ب(٣ ، ٧) ، حـ(س ، ص)

(ب) أ(-٣ ، ص) ، ب(٩ ، ١١) ، حـ(س ، -٣) (القليوبية ٢٠٢٣)

(جـ) أ(س ، -٦) ، ب(٩ ، -١١) ، حـ(-٣ ، ص)

(د) أ(س ، ٣) ، ب(٦ ، ص) ، حـ(٤ ، ٦)

٢ إذا كانت أ (١ ، -٦) ، ب(٩ ، ٢) (الأقصر ٢٠٢٢)

**فأوجد** إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{أب}$ إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول.

٣ **أثبت أن** النقط أ(٦ ، ٠) ، ب(٢ ، -٤) ، حـ(-٤ ، ٢) هى رءوس مثلث قائم الزاوية فى ب ،
**ثم أوجد** إحداثيى نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب حـ ء مستطيلًا.

٤ إذا كانت النقط أ (٣ ، ٢) ، ب(٤ ، -٣) ، حـ(-١ ، -٢) ، ء(-٢ ، ٣) هى رءوس معين **فأوجد**:

(١) إحداثيى نقطة تقاطع القطرين. (ب) مساحة المعين أ ب حـ ء (الغربية ٢٠٢٤)

٥ **أثبت أن** النقط أ(-٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، حـ(١ ، -٦) هى رءوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ،
**ثم أوجد** طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على $\overline{ب حـ}$

٦ إذا كانت أ (-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٦ ، ٠) ، ء(٣ ، -٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى
متعامد، **فأثبت أن** $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ينصف كل منهما الآخر، **ثم عيِّن نوع الشكل**. (كفر الشيخ ٢٠١٧)

٧ **أثبت أن** النقط أ (٥ ، ٣) ، ب(٣ ، -٢) ، حـ(-٢ ، -٤) هى رءوس مثلث منفرج الزاوية فى ب ،
**ثم أوجد** إحداثيى نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب حـ ء معينًا **وأوجد مساحة سطحه**.
(الغربية ٢٠٢٢)

٨ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه أ (٣ ، ٤) ، ب(٢ ، -١) ، حـ(-٤ ، -٣) أوجد إحداثيى ء ،
خذ هـ ∈ $\overleftrightarrow{أء}$ حيث أهـ = ٢ أء **ما إحداثيا النقطة هـ ؟**

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت: أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤) فإن إحداثيي منتصف $\overline{أب}$ هما ............... (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (١ ، ١) (د) (٠ ، ٠)

٢ إذا كانت: النقطة (٥ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١٥، ص) ، ب (–٥ ، –٢)، فإن ص = ........... (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٣ النقطة (٥ ، ٧) صورة النقطة (–٣ ، ١) بالانعكاس فى النقطة ............... (الشرقية ٢٠٢٣)

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (–١ ، –٤) (جـ) (١ ، ٤) (د) (٥ ، ٥)

٤ إذا كانت: $\overline{أب}$ قطرًا فى دائرة حيث أ (٣ ، –٥) ، ب (٥ ، ١)، فإن مركز الدائرة هو ........... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) (٤ ، –٢) (ب) (٨ ، –٤) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (٢ ، ٢)

٥ النقطة (٠ ، ٤) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (–١، –١) ، ب (س ، ص)، فإن: س + ص = ............ (سوهاج ٢٠٢٤)

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ١٠ (د) –٢

٦ بُعد النقطة (٣ ، –٤) عن محور السينات يساوى ............. وحدات طول. (الجيزة ٢٠٢٣)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٢

---

## ٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ إذا كانت النقطة (٣ ، ١) فى منتصف البُعد بين النقطتين (١ ، ص) ، (س ، ٢)
فأوجد النقطة (س ، ص) (المنيا ٢٠٢٤)

٢ أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى هـ حيث أ (٤ ، ٣) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ (–٢ ، –٣)
أوجد إحداثيى كل من هـ ، د (السويس ٢٠٢٣)

٣ مثل النقط أ (٤ ، ٢) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ (٠، ٤) ، د (٤ ، ٤) على مستوى إحداثى متعامد،
ثم أثبت أن القطرين $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بد}$ ينصف كل منهما الآخر. (القاهرة ٢٠٢٢)

٤ إذا كان $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م حيث أ (٧ ، –٣) ، ب (٥،١) فأوجد: (المنوفية ٢٠٢٣)

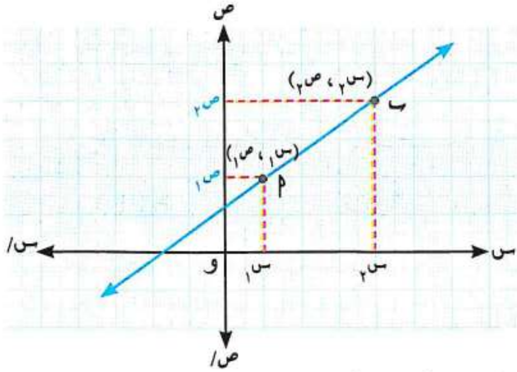
(أ) إحداثيات مركز الدائرة م (ب) مساحة سطح الدائرة م ($\pi \simeq$ ١٤ , ٣)

# ميـل الخـط المستقيـم






## فكر وناقش




- **سبـق أن علمت أن:**

ميـل الخط المستقيم المار بالنقطتين

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

ويرمز له بالرمز م هو:

$$م = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{الفرق بين الإحداثيات الصادية}}{\text{الفرق بين الإحداثيات السينية}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

**فمثلًا:** **فى الشكل المقابل:**

- عند التحرك من النقطة أ (−١ ، ٠)

إلى النقطة ب (٢ ، ٢) فإن:

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ٠}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$$

- وعند التحرك من النقطة ب (٢ ، ٢)

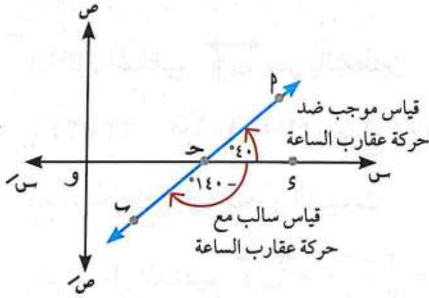
إلى النقطة حـ (٥ ، ٤) فإن:

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{بحـ} = \frac{٤ - ٢}{٥ - ٢} = \frac{٢}{٣}$$

**أى أن: ميل الخط المستقيم لا يتغير عند التحرك من نقطة إلى أخرى على نفس المستقيم.**

- **وفى هذا الدرس سنتعلم كيفية إيجاد ميل المستقيم بمعلومية قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.**

## القياس الموجب والقياس السالب للزاوية:



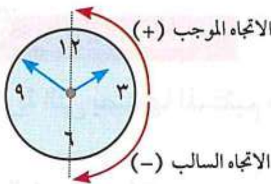

فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{م ب}$ يصنع زاويتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

إحداهما (قياسها موجب).

مأخوذة من **الاتجاه الموجب** لمحور السينات إلى المستقيم

فى **عكس** اتجاه حركة عقارب الساعة وهى ∠ ء حـ م




والأخرى (قياسها سالب)

مأخوذة من الاتجاه الموجب لمحور السينات إلى المستقيم

فى **نفس** اتجاه حركة عقارب الساعة وهى ∠ ء حـ ب

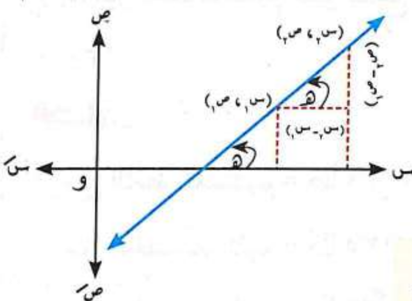
### نقاط هامة

- إذا كان القياس السالب للزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = -هـ

  فإن القياس الموجب للزاوية يكون بإضافة ١٨٠° أى -هـ + ١٨٠°

## أولًا ميل الخط المستقيم:

**تعريف**




**ميل الخط المستقيم:**

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا الخط المستقيم

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له بالرمز م

∴ م = ظا هـ ، أى أن: $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = ظا هـ$

حيث هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

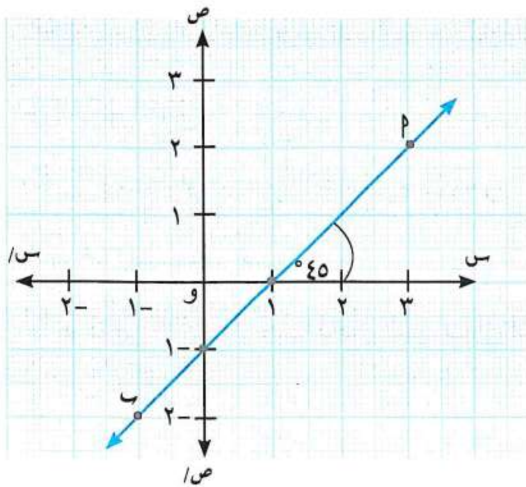
**فمثلًا:**

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطتين

أ (٣ ، ٢) ، ب (-١ ، -٢) ويصنع زاوية قياسها ٤٥°

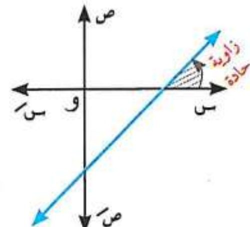
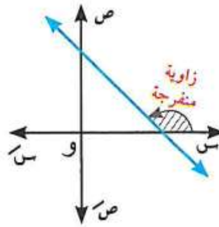
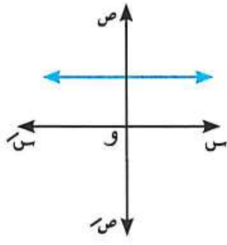
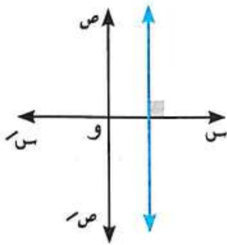
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

يكون ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-٢ - ٢}{-١ - ٣} = ١ =$ ظا ٤٥°




## نقاط هامة

- الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تأخذ إحدى الحالات الآتية:

| الزاويــة حــادة | الزاويــة منفرجــة | الزاويــة صفريــة<br>الخط مـوازٍ لمحور السينـات | الزاويــة قائمــة<br>الخط مـوازٍ لمحور الصادات |
|---|---|---|---|
|   |   |  |  |
| م > ٠ | م < ٠ | م = صفر | م غير معرف |

## مثـال ١

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها:

١ ٣٠°    ٢ ١٣٥°    ٣ ٣٦ ″ ١٨ ′ ٥٦°

**الحـل**

١ ميل الخط المستقيم = ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ابدأ → Tan 3 0 = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

٢ ميل الخط المستقيم = ظا ١٣٥° = -١

ابدأ → Tan 1 3 5 = −1

٣ ميل الخط المستقيم = ظا ٣٦ ″ ١٨ ′ ٥٦° ≃ ١,٥

ابدأ → = Tan 5 6 °‚‚‚ 1 8 °‚‚‚ 3 6 °‚‚‚ = 1.5

## مثال ٢

**أوجد القياس الموجب للزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = $-\sqrt{٣}$**

**لاحظ أن**

- إذا كان الميل سالبًا فإن المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

**الحل**

بفرض أن ميل المستقيم يساوى م وقياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى هـ

$\because$ م = $-\sqrt{٣}$ $\quad$ $\therefore$ ظا هـ = $-\sqrt{٣}$ $\quad$ $\therefore$ ق ($\angle$ هـ) = ظا$^{-١}$ ($-\sqrt{٣}$)

ابدأ ← shift Tan − $\sqrt{3}$ = °,,,,

$\therefore$ نجد أن: هـ = $-٦٠°$

ولإيجاد القياس الموجب للزاوية نضيف ١٨٠° للقياس السالب فيكون:

1 8 0 + Ans = °,,,, 120

$\therefore$ هـ = $-٦٠° + ١٨٠° = ١٢٠°$

## مثال ٣

**أوجد قياس الزاوية الموجبة هـ التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**

إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين: ① (−٣ ، −٢)، (٤ ، ٥) ② (−٣ ، $٢\sqrt{٣}$)، (٠ ، $٥\sqrt{٣}$)

**الحل**

① ميل المستقيم ل = $\frac{٥ + ٢}{٤ + ٣} = \frac{٧}{٧} = ١$

$\therefore$ ظا هـ = ١

(باستخدام الآلة الحاسبة)

$\therefore$ ق ($\angle$ هـ) = ظا$^{-١}$ (١) = ٤٥°

② ميل المستقيم ل = $\frac{٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٠ - (-٣)}$

$\therefore$ ظا هـ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

(باستخدام الآلة الحاسبة)

$\therefore$ ق ($\angle$ هـ) = ظا$^{-١}$ ($\sqrt{٣}$) = ٦٠°

### سؤال ١

① **أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها:**

(أ) ٦٠° $\qquad$ (ب) ٥٤″ ١١′ ٤٣° $\qquad$ (جـ) ١″ ١٥′ ١١٠°

② **أوجد القياس الموجب للزاوية هـ التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**

إذا كان ميل المستقيم كما يلى:

(أ) م = ٠,٣٦٧٣ $\qquad$ (ب) م = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\qquad$ (جـ) م = ١,٤٨٦٥

## مثـال ٤

إذا كانت أ (٣، ٤)، ب (٥ ، ص) وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٦ **فما قيمة ص؟**

**ثم أوجد قياس الزاوية التى يصنعها** $\overleftrightarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

**الحـل**

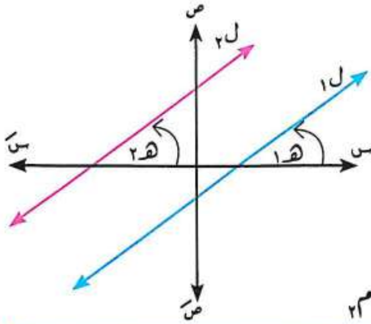
نفرض أن هـ هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص - ٤}{٥ - ٣} = ٦$ ∴ $\frac{ص - ٤}{٢} = ٦$ ∴ ص − ٤ = ١٢ ∴ ص = ١٦

∵ ظا هـ = ٦ ∴ هـ = $ظا^{-١}(٦)$ ∴ هـ = ١٦″ ٣٢′ ٨٠°

## ثانيًا العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين:

١ **العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين:**




فى الشكل المقابل:

مستقيمان متوازيان $ل_١$ ، $ل_٢$ ميلهما $م_١$، $م_٢$ على الترتيب، يصنع كل منهما زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما على الترتيب $هـ_١$ ، $هـ_٢$

∵ $هـ_١ = هـ_٢$ (بالتناظر) ∴ ظا $هـ_١$ = ظا $هـ_٢$ ∴ $م_١ = م_٢$

### قاعـدة ١

- إذا كان: $ل_١ // ل_٢$ فإن: $م_١ = م_٢$ (إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين)
- إذا كان: $م_١ = م_٢$ فإن: $ل_١ // ل_٢$ (إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين)

## مثـال ٥

**أثبت أن** الخط المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، −٢) ، (٤ ، ٥) يوازى الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° (البحيرة ٢٠٢٢)

**الحـل**

نفرض أن ميل المستقيم الأول $م_١$ ، ميل المستقيم الثانى $م_٢$

∴ $م_١ = \frac{٥ - (-٢)}{٤ - (-٣)} = ١$ ، $م_٢$ = ظا ٤٥° = ١

∴ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان.

## مثال ٦

**إذا كانت أ (١ ، ٤) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (-٢ ، ٣) ، ء (س ، ٤) أربع نقاط فى مستوى إحداثى متعامد، وكان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$ فأوجد قيمة س**

**الحل**

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{حـء}$

∴ $\frac{٥ - ٤}{٤ - ١} = \frac{٤ - ٣}{س - (-٢)}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \frac{١}{س + ٢}$

∴ س + ٢ = ٣ ∴ س = ١



**نقاط هامة**

- لإثبات أن: أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة **أو** ب تنتمى للمستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$ نثبت أن: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$

- لإثبات أن: أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة **أو** أ ، ب ، حـ هى رءوس مثلث نثبت أن: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$

## مثال ٧

**أثبت أن النقط أ (-١ ، ٤) ، ب (-٢ ، ٢) ، حـ (-٣ ، ٠) تقع على استقامة واحدة.**

**الحل**

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢ - ٤}{-٢ - (-١)} = \frac{-٢}{-١} = ٢$ ، ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{٠ - ٢}{-٣ - (-٢)} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$

∵ ب نقطة مشتركة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$

∴ النقـط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة

## مثال ٨

إذا كانت النقط (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة **فأوجد** قيمة أ (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

**الحل**

∵ النقط الثلاث تقع على استقامة واحدة

∴ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) = ميل المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٢ ، ٥)

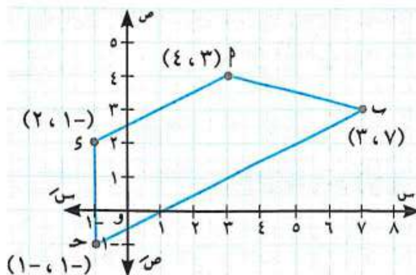
$\therefore \frac{٣ - ١}{أ - ٠} = \frac{٥ - ١}{٢ - ٠}$ $\therefore \frac{٢}{أ} = \frac{٢}{١}$ $\therefore$ أ = ١

## مثال ٩

**على مستوى إحداثى متعامد مثّل النقط أ (٣ ، ٤) ، ب (٧ ، ٣) ، حـ (-١ ، -١) ، ى (-١ ، ٢)**

**ثم أثبت أن الشكل أ ب حـ ى شبه منحرف.**

**الحل**




ميل $\overleftrightarrow{أى} = \frac{٤ - ٢}{٣ - (-١)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{بحـ} = \frac{٣ - (-١)}{٧ - (-١)} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أى}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ ∴ $\overleftrightarrow{أى} \parallel \overleftrightarrow{بحـ}$ ——— ①

∵ أ ى = $\sqrt{(٣ + ١)^٢ + (٤ - ٢)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(٧ + ١)^٢ + (٣ + ١)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ أ ى ≠ ب حـ ——— ②

من ① ، ② ∴ الشكل أ ب حـ ى شبه منحرف.

**لاحظ أن**

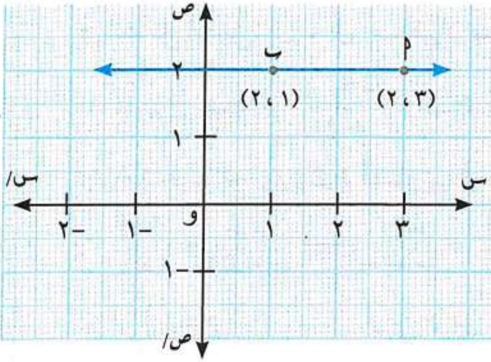
- من الممكن إثبات أن الشكل شبه منحرف إذا وجد به ضلعان متقابلان متوازيان وآخران غير متوازيين.

## سؤال ٢

1. **إذا كان** أ (٣ ، ٤) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (٢ ، -١) **فأثبت أن:** النقطة أ تنتمى للمستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$
2. **إذا كانت النقط:** أ (٣ ، ٢) ، ب (-١ ، س) ، حـ (-٥ ، ٦) تقع على استقامة واحدة **فأوجد قيمة** س



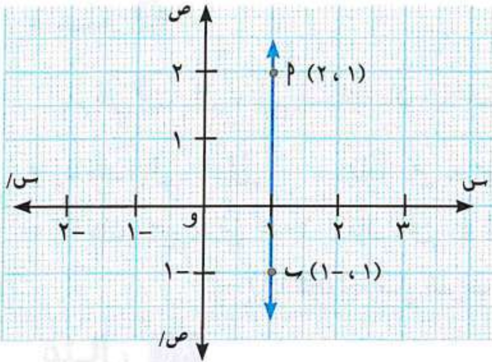
## نقاط هامة




- المستقيم الموازى لمحور السينات: ميله = صفر
  ، الإحداثيات الصادية لجميع النقاط التى تقع عليه متساوية.

**فمثلًا:** المستقيم $\overleftrightarrow{ٯب}$ حيث ٯ (٣، ٢) ، ب(١، ٢)

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)




- المستقيم الموازى لمحور الصادات: ميله غير معرف.
  ، الإحداثيات السينية لجميع النقاط التى تقع عليه متساوية.

**فمثلًا:** المستقيم $\overleftrightarrow{ٯب}$ حيث ٯ ( ١ ، ٢) ، ب( ١ ، -١)

ويقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)

## مثال ١٠

**أثبت أن الخط المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، -٤) ، (-٢ ، -٤) يوازى محور السينات.**

**الحل**

نلاحظ أن الإحداثى الصادى فى النقطتين متساوٍ ∴ المستقيم $\overleftrightarrow{ٯب}$ يوازى محور السينات.

## مثال ١١

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{ٯب}$ // محور الصادات حيث ٯ (س ، ٧) ، ب(٣ ، ٥) **فأوجد قيمة س** (الأقصر ٢٠١٩)

**الحل**

∵ المستقيم $\overleftrightarrow{ٯب}$ // محور الصادات

∴ الإحداثيات السينية لجميع النقاط التى تنتمى إليه متساوية ∴ س = ٣

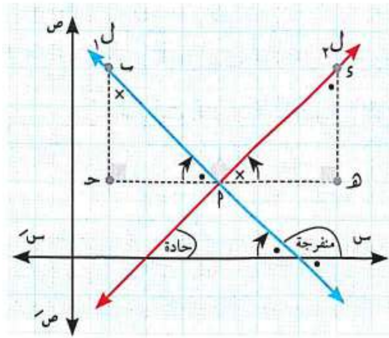
## سؤال ٣

١ **أثبت أن** المستقيم المار بالنقطتين: ٯ (٣ ، ٢) ، ب (٣، -٢) يوازى محور الصادات.

٢ **إذا كان** المستقيم المار بالنقطتين: ٯ (٤ ، ٢) ، ب(-٥، س) يوازى محور السينات، **فأوجد قيمة س**.

(الإسكندرية ٢٠٢٤)

٢ **العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين:**




فى الشكل المقابل: ل١ ، ل٢ مستقيمان متعامدان

المستقيم ل١ ميله م١ = $\frac{-\text{حـ ب}}{\text{ٲ حـ}}$ ، المستقيم ل٢ ميله م٢ = $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ ٲ}}$

∵ △ٲ حـ ب ~ △ء هـ ٲ لتساويهما فى قياسات الزوايا المتناظرة

∴ $\frac{\text{ٲ حـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{حـ ب}}{\text{هـ ٲ}}$ ⟸ $\frac{\text{ٲ حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ ٲ}}$

$\frac{-1}{م_1} = م_2$ ∴ $م_1 \times م_2 = -1$

## قاعدة ٢

**بفرض أن:** ل١ ، ل٢ مستقيمـان ميلاهما م١ ، م٢ حيث م١ ∈ ع* ، م٢ ∈ ع*

- إذا كان: ل١ ⊥ ل٢ فإن: $م_1 \times م_2 = -1$ (حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = −١)
- إذا كان: $م_1 \times م_2 = -1$ فإن: ل١ ⊥ ل٢

(إذا كان حاصل ضرب ميلى المستقيمين = −١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين)

## مثـال ١٢

أثبـت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٣$\sqrt{3}$ ) ، (٥، ٢$\sqrt{3}$ ) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠° (القليوبية ٢٠٢٤)

**الحـل**

نفرض أن ميل المستقيم الأول م١ ، وميل المستقيم الثانى م٢

∵ $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ∴ $م_1 = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{4 - 5} = -\sqrt{3}$

∵ م = ظا هـ ∴ $م_2 = ظا 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∵ $م_1 \times م_2 = -\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -1$ ∴ $م_1 \times م_2 = -1$ ∴ المستقيمان متعامدان.

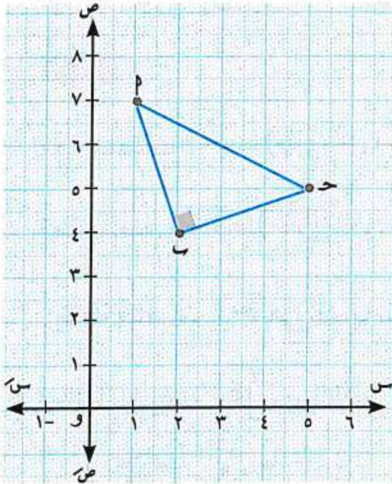
**سؤال ٤**

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين: (−٣ ، ٥) ، (٤، −٢)، عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

## مثال ١٣

إذا كانت النقاط ٩ (١ ، ٧) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (٥ ، ك) تمثل مثلثًا قائم الزاوية فى ب

**فأوجد قيمة ك، ثم أوجد مساحة سطح $\Delta$ ٩ ب حـ**




**الحـل**

بفرض م١ (ميل $\overleftrightarrow{٩ب}$) = $\frac{٤ - ٧}{٢ - ١}$ = $\frac{-٣}{١}$ = -٣

بفرض م٢ (ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$) = $\frac{ك - ٤}{٥ - ٢}$ = $\frac{ك - ٤}{٣}$

∵ $\overleftrightarrow{٩ب} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$ ∴ م٢ = $\frac{-١}{م_١}$

∴ $\frac{ك - ٤}{٣} = \frac{١}{٣}$ ∴ ك - ٤ = ١ ∴ ك = ٥

٩ ب = $\sqrt{(١ - ٢)^٢ + (٧ - ٤)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ب حـ = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٤ - ٥)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

مساحة سطح $\Delta$ ٩ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠}$ = ٥ وحدات مربعة

### نقاط هامة

- إذا كان المطلوب إثبات أن الشكل الرباعى ٩ ب حـ ء متوازى أضلاع باستخدام الميل نثبت أن كل ضلعين متقابلين متوازيان ( $\overline{٩ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ) ، ( $\overline{ب حـ}$ // $\overline{٩ء}$ )

**لإثبات أن متوازى الأضلاع**

- **مستطيل**: **نثبت أن** ضلعين متجاورين به متعامدان.
- **معين**: **نثبت أن** القطرين متعامدان.
- **مربع**: **نثبت أن** ضلعين متجاورين به متعامدان + قطريه متعامدان.

### سؤال ٥

إذا كان المثلث الذى رءوسه النقاط ٩ (س ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، حـ (٢ ، -٣) قائم الزاوية فى ب

**فأوجد قيمة س**

## مثـال ١٤

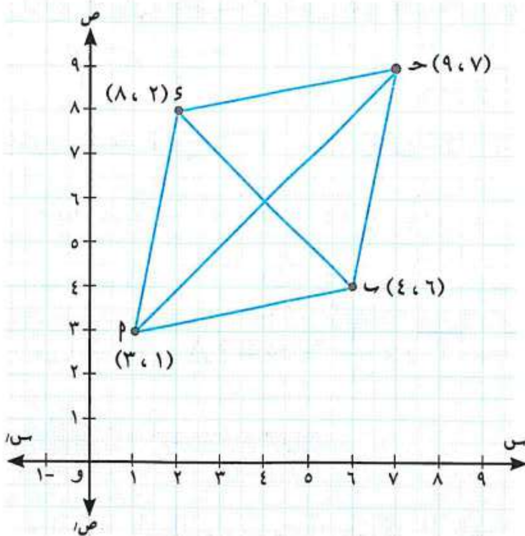
على مستوى إحداثى متعامد مثِّل النقط أ(١ ، ٣) ، ب(٦ ، ٤) ، حـ(٧ ، ٩) ، ء(٢ ، ٨)

ثم أثبت أن الشكل أ ب حـ ء معين.

### الحـل

نقطة منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ = $\left(\frac{١ + ٧}{٢} ، \frac{٣ + ٩}{٢}\right)$ = (٤ ، ٦)

نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ = $\left(\frac{٦ + ٢}{٢} ، \frac{٤ + ٨}{٢}\right)$ = (٤ ، ٦)




∵ نقطة منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ هى نفسها نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ القطران ينصف كلٌّ منهما الآخر ——— ①

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ = $\frac{٩ - ٣}{٧ - ١} = \frac{٦}{٦} = ١$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\frac{٨ - ٤}{٢ - ٦} = \frac{٤}{-٤} = -١$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = ١ × -١ = -١

∴ القطران $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ متعامدان ——— ②

من ① ، ②

∴ الشكل أ ب حـ ء معين.

**س؟ سؤال ٦**

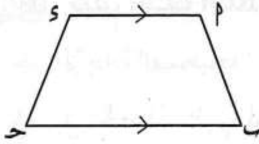
على مستوى إحداثى متعامد مثِّل النقط أ(٢ ، ٣) ، ب(-١ ، -١) ، حـ(٣ ، -٤) ، ء(٦ ، ٠)

ثم أثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب حـ ء مربع وأوجد مساحته.



## نقاط هامة

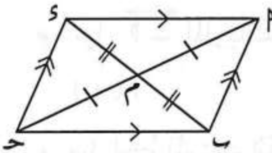
- **لإثبات أن الشكل الرباعى شبه منحرف نثبت أن:**




ضلعين متقابلين فيه متوازيان والضلعين الآخرين غير متوازيين.

**أو** ضلعين متقابلين فيه متوازيان وغير متساويين فى الطول.

- **لإثبات أن الشكل الرباعى متوازى أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية:**




١ كل ضلعين متقابلين متوازيان.

٢ كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول.

٣ ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان فى الطول.

٤ القطران ينصف كل منهما الآخر.

- **لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت أولًا أن هذا الشكل متوازى أضلاع كما سبق، ثم:**

  - **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين:**

    ١ ضلعان متجاوران فيه متعامدان. ٢ القطران متساويان فى الطول.

  - **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو معين نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين:**

    ١ ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول. ٢ القطران متعامدان.

  - **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مربع نثبت إحدى الخواص الآتية:**

    ١ ضلعان متجاوران فيه متعامدان ومتساويان فى الطول.

    ٢ ضلعان متجاوران فيه متعامدان، والقطران متعامدان.

    ٣ القطران متساويان فى الطول، ومتعامدان.

    ٤ ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول وقطراه متساويان فى الطول.





## تدريبات الأضـــواء

### أولًا ميل الخط المستقيم:

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ ميل الخط المستقيم الموازى لمحور الصادات .............. (الفيوم ٢٠٢٣)

(أ) غير معرف (ب) -١ (جـ) صفر (د) ١

٢ ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤) يساوى ..............

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

٣ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ المار بالنقطتين أ (١، ٥)، ب (٢، ٣) هو ..............

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) -٢ (د) $\frac{-١}{٢}$

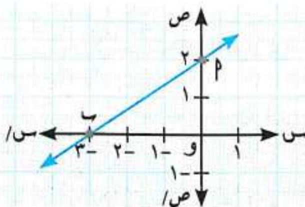
٤ ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ يساوى ........ (الجيزة ٢٠٢٠)

(أ) جاهـ (ب) جتاهـ (جـ) $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ (د) جاهـ + جتاهـ

٥ إذا كان ميل خط مستقيم أكبر من الصفر، فإن الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون .............. (دليل التقويم)

(أ) صفرية (ب) حادة (جـ) قائمة (د) منفرجة

٦ فى الشكل المقابل ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = .............. (الإسكندرية ٢٠٢٤)

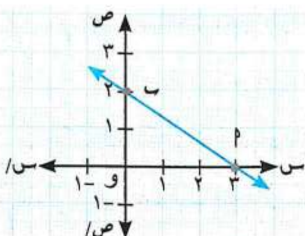




(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

٧ فى الشكل المقابل: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ..............





(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

٨ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ك) ، ميله = ظا ٤٥° تكون ك = ........... (الشرقية ٢٠٢٤)

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٦

٩ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ($\sqrt{٣}$ ، ١) ، (٢$\sqrt{٣}$ ، ص) يصنع زاوية قياسها ٦٠°
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ص = ............... (كفر الشيخ ٢٠٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

١٠ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث: أ (٤ ، ٢) ، ب(-٥ ، ص) فإن ص = ...............

(أ) -٥ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) ٤

١١ المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٣) ، ($\sqrt{٣}$ ، ٤) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها = ...............

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

١٢ المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة (-١ ، -١) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ...............

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

---

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها:

١ ٦٠° ٢ ٤٥° ٣ ٣٠°

٤ ٩٠° ٥ صفر° ٦ ٨٢° ١٢َ

---

٣ (باستخدام الآلة الحاسبة) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات الآتية:

١ ١,٧٣٢١ ٢ ١,٢ ٣ ٣,٠١٧ ٤ ٠,٥٦١٦ ٥ ٢,٦١٧٨

---

٤ أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، $\sqrt{٣}$) ، (١ ، ٤$\sqrt{٣}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (الأقصر ٢٠١٩)

## ثانيًا العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمتعامدين:

**٥ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان ............... (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

( ا ) متوازيين (ب) متقاطعين (جـ) متعامدين ( د ) خلاف ذلك

٢ حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين= ............... (دمياط ٢٠٢٢)

( ا ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $-١$ ( د ) ١

٣ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ هما ميلى مستقيمين متوازيين فإن: ............... (قنا ٢٠٢٣)

( ا ) $م_١ - م_٢ = ٠$ (ب) $م_١ + م_٢ = ٠$ (جـ) $م_١ \times م_٢ = ٠$ ( د ) $م_١ \times م_٢ = -١$

٤ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ هما ميلى مستقيمين متعامدين فإن: ...............

( ا ) $م_١ - م_٢ = ٠$ (ب) $م_١ - م_٢ = -١$ (جـ) $م_١ \times م_٢ = -١$ ( د ) $م_١ \times م_٢ = ١$

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{حء}$ = ............... (القليوبية ٢٠٢٢)

( ا ) $-٣$ (ب) $\frac{-١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ ( د ) ٣

٦ إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٥}{٧}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{حء}$ = ............... (شمال سيناء ٢٠٢٢)

( ا ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٧}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٧}$ ( د ) $\frac{-٥}{٧}$

٧ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متعامدين ، $م_١ = ٠,٧٥$ فإن $م_٢$ = ............... (الشرقية ٢٠٢٣)

( ا ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ ( د ) $\frac{٣}{٤}$

٨ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متوازيين فإن ك = ............... (كفر الشيخ ٢٠١٩)

( ا ) $-٤$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ ( د ) ٦

٩ مستقيمان متعامدان، ميل أحدهما $\frac{-١}{٤}$ وميل الآخر ٤ ك فإن ك= ............... (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

( ا ) $-٤$ (ب) ٤ (جـ) ١ ( د ) $\frac{١}{٤}$

١٠ إذا كان الخط المستقيم المار بالنقطتين (ﻫ ، ٠) ، (٠ ، ٤) عموديًا على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°، فإن ﻫ = ..............

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ١ (د) −١

١١ إذا كان المستقيم $ل_١$ ميله $\frac{ﻫ}{٥}$ ، المستقيم $ل_٢$ ميله $\frac{-ب}{٣}$ حيث ﻫ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، فإذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ فإن ﻫ ب = .............. (الشرقية ٢٠٢٣)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) ١٥ (جـ) ٣ (د) −١٥

١٢ إذا كان ﻫ ب حـ ء متوازى أضلاع، فيه: ﻫ (−١ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) فإن ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) $\frac{-١}{٣}$

١٣ إذا كان ﻫ ب حـ ء معينًا، فيه: ﻫ (−٣ ، ٢) ، حـ (−١ ، −٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ = ..............

(أ) −٢ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

١٤ المستقيم الذى ميله يساوى العدد المحايد الجمعى يوازى المستقيم الذى معادلته .......... (الدقهلية ٢٠٢٣)

(أ) ص = س (ب) ص = ١ (جـ) س = ١ (د) ص = −س

---

٦ باستخدام الميل أثبت أن النقط: ﻫ (−٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٥) ، حـ (٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة. (شمال سيناء ٢٠٢٢)

---

٧ إذا كانت النقط: ﻫ (−٣ ، −١) ، ب (ك ، ك) ، حـ (٦ ، ٥) تقع على استقامة واحدة.
فأوجد باستخدام الميل قيمة ك. (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

---

٨ أثبت أن الخط المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٦) ، (٤ ، ٣) يوازى الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٨) ، (١ ، ٥) (أسيوط ٢٠٢٣)

---

٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٦ ، ٩) والمستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متوازيان. (سوهاج ٢٠٢٣)

---

١٠ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$ ) ، (٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٦٠°. (كفر الشيخ ٢٠١٨)

١١ أثبت أن الخط المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، −٣) ، (−٢ ، −٤) عمودى على الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

١٢ إذا كان أ ب حـ ء مربعًا فيه: أ (٣ ، ٥) ، حـ (٥ ، −١) فأوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ (الغربية ٢٠٢٣)

١٣ إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية حادة موجبة قياسها هـ° حيث حاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فأثبت أن $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدان. (الدقهلية ٢٠٢٢)

١٤ باستخدام الميل أثبت أن المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب، حيث إن:
أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (−٥ ، ٦) ثم أوجد مساحة سطحه.

١٥ إذا كانت: النقط ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (−٥ ، أ) رءوس مثلث قائم الزاوية فى ص
فأوجد قيمة أ (الفيوم ٢٠٢٢)

١٦ أثبت باستخدام الميل أن النقط: أ (−٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٥) ، حـ (٢ ، ٤) ، ء (−٧ ، −٢)
هى رءوس متوازى أضلاع. (القليوبية ٢٠٢٢)

١٧ أ ب حـ ء شكل رباعى حيث النقط: أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (−٢ ، −٢) ، ء (−٢ ، ١)
أثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف. (بورسعيد ٢٠٢٣)

١٨ مثِّل بيانيًّا فى مستوى إحداثى متعامد النقط أ (٢ ، ٠) ، ب (٠ ، −٢) ، حـ (−٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ٢)،
وأثبت باستخدام الميل أنها رءوس مربع.

١٩ إذا كانت النقط: أ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، −٢) ، حـ (١ ، −١) فأجب عما يأتى:

١ أثبت باستخدام الميل أن النقط: أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة. (الإسماعيلية ٢٠١٥)

٢ إذا كانت ء (٠ ، ٤) فأثبت باستخدام الميل: أن الشكل أ ب حـ ء معين.

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢٠ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) يوازى المستقيم الذى يصنع مع محورى الإحداثيات فى الربع الثانى مثلثًا متساوى الساقين، فأوجد قيمة ك. (الغربية ٢٠١٦)

## تفكير إبداعى  TIMSS

**٢١** **أوجد** قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ حيث:

$ل_1$ يمر بالنقطتين (١ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ) ، (٠ ، $\sqrt{٣}$ ) ، $ل_2$ يمر بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (-١ ، -١).

---

**٢٢** إذا كان ٩ ب حـ ء مستطيلًا فيه: ٩ (٠ ، ٤) ، حـ (-١٠ ، ٤)، ونقطة ب تقع على محور السينات

**فأوجد** إحداثى النقط ب ، ء

---

**٢٣** ل م ن ع معين فيه: ل(٦ ، ٤) ، م (-٤ ، ك) ، ن(-٢ ، -٤)

**أوجد** قيمة ك ثم **أوجد** مساحة المعين.

## تدريبات الكتاب المدرسى

**١** **أكمل ما يأتى:**

١ إذا كان : $\overleftrightarrow{٩ب}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{٩ب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يساوى .............. (السويس ٢٠٢٣)

٢ إذا كان: $\overleftrightarrow{٩ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{٩ب}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يساوى .............. (القاهرة ٢٠١٩)

٣ ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣)، (-٢ ، ٣) يساوى ..............

٤ إذا كان $\overleftrightarrow{٩ب}$ يوازى محور السينات حيث ٩ (٨ ، ٣)، ب (٢ ، ك) فإن ك = .............. (أزهر الجيزة ٢٠٢٤)

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يوازى محور الصادات حيث حـ (م، ٤)، ء (-٥ ، ٧) فإن م = ..............

(أزهر بنى سويف ٢٠٢٤)

٦ ٩ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فيه ٩ (١ ، ٤)، ب (-١ ، -٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = ..............

٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٩ ، ٠)، (٠ ، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن ٩ = ..............

## ٢ تمارين متنوعة:

١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين ٩ (-٣ ، ٤) ، حـ (-٣ ، -٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢) ، ٤ (-٣ ، ٢) (أسوان ٢٠٢٣)

٢ إذا كانت ٩ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠) فأثبت أن المثلث ٩ ب حـ قائم الزاوية فى ب (مطروح ٢٠٢٢)

٣ إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ :

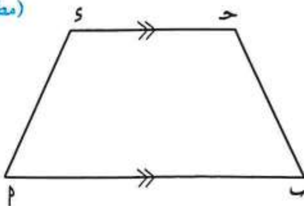
( ا ) متوازيين (المنوفية ٢٠٢٢) (ب) متعامدين (الجيزة ٢٠٢٢)

٤ إذا كانت النقط (٠ ، ١) ، (٩ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة ٩ (القليوبية ٢٠٢٤)

٥ أثبت أن النقط ٩ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، حـ (٤ ، ٢) ، ٤ (٥ ، ٦) هى رءوس متوازى أضلاع.

٦ أثبت باستخدام الميل أن النقط: ٩ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) ، ٤ (٠ ، ٦) هى رءوس مستطيل. (الفيوم ٢٠٢٣)

٧ فى الشكل المرسوم: (مطروح ٢٠٢٢)




٩ ب حـ ٤ شبه منحرف فيه: $\overline{٩ب} // \overline{حـ٤}$ ، ٩ (٩ ، -٢) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (س ، -س) ، ٤ (٤ ، -٣)

أوجد إحداثيى نقطة حـ

٨ أثبت أن النقط ٩ (٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٠) ، حـ (١ ، -٢) هى رءوس مثلث ، وإذا كانت نقطة ٤ (١ ، ٢) فأثبت أن الشكل ٩ ب حـ ٤ شبه منحرف ، وأوجد النسبة بين ٩ ٤ ، ب حـ (البحيرة ٢٠١٨)

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٤٥° يساوى .............. (شمال سيناء ٢٠١٩)

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفرًا (د) ١,٤

٢ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١}{٤}$ فإن: ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = .............. (أسيوط ٢٠٢٣)

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

٣ إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٥}{٣}$ فإن: ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = .............. (القاهرة ٢٠٢٣)

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{-٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

٤ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{١٥}{ك}$ متوازيين فإن: ك = .............. (بنى سويف ٢٠٢٢)

(أ) ١٠ (ب) -٩ (جـ) ٥ (د) ٩

٥ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{٢}$ متعامدين فإن: أ = .............. (سوهاج ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٦ إذا كان: أ (٠، ٠) ، ب (٥ ، ٧) ، حـ (٥، هـ) رءوس المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ فإن: هـ = .............. (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) -٥

---

## ٢ أجب عن الأسئلة التالية:

١ أثبت أن: المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ، (٠،٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-١،٤) ، (١،٧) (جنوب سيناء ٢٠٢٣)

٢ إذا كان: المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (أ ، ١) ، (٢ ، ٤) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة أ إذا كان المستقيمان متوازيين. (دمياط ٢٠٢٤)

٣ أ ب حـ مثلث فيه: أ (٢،٨) ، ب (-١، ٤) ، حـ (٣، ١) أثبت أن $\Delta$ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب (المنيا ٢٠٢٢)

٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه: أ (١، ١) ، ب (٣، ٣) ، حـ (٠، -٣ س) ، ء (س، ص) أوجد قيمة: س، ص (الأقصر ٢٠٢٤)



الدرس ٣

# ذاكر

# معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

فيديو الشرح



## فكر وناقش

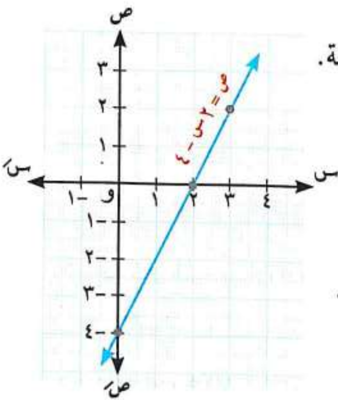
• الصورة العامة للعلاقة الخطية بين المتغيرين س ، ص هى:

أ س + ب ص + حـ = ٠ حيث أ ∈ ع ، ب ∈ ع ، حـ ∈ ع

حـ يسمى الحد المطلق ، أ ، ب لا يساويان الصفر معًا. (العلاقة الخطية يمثلها بيانيًا خط مستقيم)

**فمثلًا:** إذا كان لدينا العلاقة: ص = ٢ س − ٤ فإن:

الأزواج المرتبة (٠ ، −٤) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٢) تحقق هذه العلاقة.




برسم هذه العلاقة على الشبكة التربيعية نستنتج أن:

١ طول الجزء المقطوع من محور السينات يساوى ٢ وحدة طول.

٢ طول الجزء المقطوع من محور الصادات يساوى ٤ وحدات طول.

٣ ميل الخط المستقيم الممثل بالعلاقة ص = ٢س − ٤ يساوى ٢

## أولًا إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات إذا عُلم معادلته:

إذا كانت لدينا معادلة الخط المستقيم: ص = م س + حـ فإن:

١ ميل الخط المستقيم = م لماذا؟

إذا افترضنا أن أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ نقطتان مختلفتان $(س_1 \neq س_2)$ واقعتان على الخط المستقيم.

فإن $ص_1 = م س_1 + حـ$ ، $ص_2 = م س_2 + حـ$

ويكون الميل $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{م س_2 + حـ - م س_1 - حـ}{س_2 - س_1} = \frac{م (س_2 - س_1)}{(س_2 - س_1)} = م$ $(س_1 \neq س_2)$

٢ طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات = |حـ| وحدة طول.

٣ المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ).

**فمثلًا:** ١ إذا كانت معادلة المستقيم ص = ٤ س + ٥ فإن ميل المستقيم = ٤ وهو معامل س بشرط معامل ص = ١
وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = | ٥ | = ٥ وحدات طول

٢ إذا كانت معادلة المستقيم ٢ ص = ٨ س − ٢ فإن ميل المستقيم = $\frac{٨}{٢}$ = ٤
وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{-٢}{٢}\right|$ = ١ وحدة طول.

## مثال ١

**إذا كانت** ص = ٥ س − ١٠ تمثل معادلة خط مستقيم **فأوجد كلًّا من:**

١ ميل المستقيم. ٢ طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.

٣ طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور السينات.

**الحــل**

١ ميل المستقيم = ٥

٢ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = |−١٠| = ١٠ وحدات طول.

٣ لإيجاد طول الجزء المقطوع من محور السينات (نضع ص = ٠)

∴ صفر = ٥ س − ١٠ ⟸ ٥ س = ١٠ ⟸ س = ٢

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات = ٢ وحدة طول.

## مثال ٢

**أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته ٣ س − ٥ ص = ١٠ وأوجد طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.**

**الحــل**

∵ ٣ س − ٥ ص = ١٠ ∴ ٥ ص = ٣ س − ١٠

∴ ص = $\frac{٣}{٥}$ س − $\frac{١٠}{٥}$ ∴ ص = $\frac{٣}{٥}$ س − ٢

الميل = $\frac{٣}{٥}$ ، طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات = |−٢| = ٢

**س؟ سؤال ١**

**أوجد ميل المستقيم الذى معادلته −ص = −٣ س + ١ ، ثم أوجد طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.**

## ميل المستقيم الذى معادلته: $\text{أ}س + \text{ب}ص + \text{حـ} = 0$

• يمكن وضع معادلة الخط المستقيم: $\text{أ}س + \text{ب}ص + \text{حـ} = 0$ على الصورة $ص = مس + \text{حـ}$ كالآتى:

∵ $\text{أ}س + \text{ب}ص + \text{حـ} = 0$      ∴ $\text{ب}ص = -\text{أ}س - \text{حـ}$

∴ $ص = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}س - \frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$ ⟸ وهى على الصورة $ص = مس + \text{حـ}$

∴ $م = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$ وطول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات $= \left|\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}\right| = |\text{حـ}|$

## مثال ٣

**أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته ٣ س + ٤ ص − ٥ = صفر مستخدمًا طريقتين مختلفتين.**

**ثم أوجد طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.**

**الحل**

• **الطريقة الأولى:** $م = \frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص} = \frac{-٣}{٤}$

• **الطريقة الثانية:** بوضع المعادلة على الصورة $ص = م س + \text{حـ}$

**فيكون:** $ص = \frac{-٣}{٤}س + \frac{٥}{٤}$     **ويكون:** $م = \frac{-٣}{٤}$

• طول الجزء المقطوع من محور الصادات $= \left|\frac{٥}{٤}\right| = \frac{٥}{٤}$ وحدة طول.

## مثال ٤

**أثبت أن الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (١ ، ٣) عمودى على الخط المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س + ٥** (القاهرة ٢٠٢٤)

**الحل**

ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (١ ، ٣) هو $\frac{٣ - ٢}{١ - ٣} = \frac{-١}{٢}$

ميل المستقيم الذى معادلتـه $ص = ٢س + ٥$ هو ٢

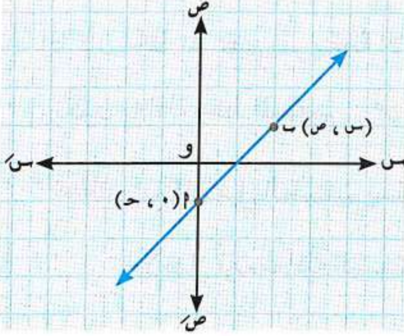
∵ حاصل ضرب ميلى المستقيمين يساوى $\frac{-١}{٢} \times ٢ = -١$     ∴ المستقيمان متعامدان.

### سؤال ٢

١ **أوجد** ميل المستقيم الذى معادلته $-٤ص + ٣س - ٦ = 0$ **ثم أوجد:** طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

٢ **أثبت** أن المستقيم المار بالنقطتين أ (−١ ، ٣) ، ب (١ ، ٤) يوازى المستقيم الذى معادلته $س - ٢ص = ١$
(البحر الأحمر ٢٠٢٤)

## ثانيًا إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات:




لإيجاد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ بمعلومية ميله م

وطول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات |حـ|

نفرض أن ب (س ، ص) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

والمستقيم يمر بالنقطة أ (٠ ، حـ)

∴ م = $\frac{ص - حـ}{س - ٠}$

∴ م = $\frac{ص - حـ}{س}$

∴ ص − حـ = م س     ∴ ص = م س + حـ

### نقاط هامة

• معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هى:

ص = م س + حـ ، (م ∈ ع ، حـ ∈ ع)

حيث: م = ميل الخط المستقيم ، |حـ| = طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.

## مثال ٥

**أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله = ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٦ وحدات طول.**

**الحل**

∵ معادلة الخط المستقيم هى: ص = م س + حـ ، وحيث م = ٣ ، حـ = −٦

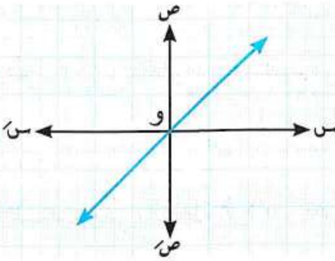
∴ المعادلة هى: ص = ٣ س − ٦

### سؤال ٣

(١) **أوجد** معادلة الخط المستقيم الذى ميله = −٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات طول.

(٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (٦ ، −٣) عموديًا على المستقيم الذى معادلته ص − أ س + ٣ = ٠ **فأوجد** قيمة أ (الإسكندرية ٢٠٢٤)

## حالات خاصة لمعادلة المستقيم:

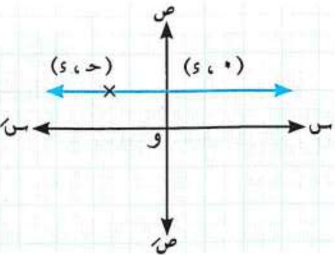



١ إذا كان الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) فإن: حـ = ٠

وتكون معادلة الخط المستقيم ص = م س

**فمثلًا:** إذا كان ميل المستقيم يساوى $\frac{٣}{٤}$ والمستقيم يمر بنقطة الأصل فإن معادلة المستقيم هى ص = $\frac{٣}{٤}$ س

---




٢ إذا كان الخط المستقيم موازيًا لمحور السينات ويمر بالنقطة (حـ، ء)

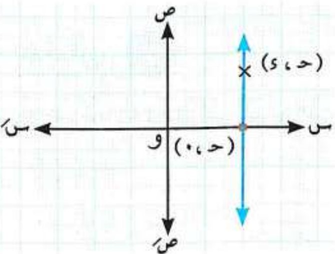
فإن معادلته ص = ء ويكون ميله = صفر

الخط المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ء)

**فمثلًا:** إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

ويمر بالنقطة (٣ ، –٦) فإن معادلته هى ص = – ٦

---




٣ إذا كان الخط المستقيم موازيًا لمحور الصادات

ويمر بالنقطة (حـ ، ء) فإن معادلته س = حـ

ويكون ميله غير معرف.

الخط المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (حـ ، ٠)

**فمثلًا:** إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، –١)

فإن معادلته هى س = ٢

---

٤ معادلة محور السينـات هى ص = ٠ ، ميله = صفر

معادلة محور الصادات هى س = ٠ ، ميله غير معرف

## مثال ٦

**أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣ ، ٨)**

**الحل**

∵ معادلة المستقيم ص = م س + حـ ، الميل = ٢

∴ معادلة المستقيم هى: ص = ٢ س + حـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٨) ∴ فهى تحقق معادلته.

∴ ٨ = ٢(٣) + حـ ∴ ٨ = ٦ + حـ

∴ حـ = ٢ ∴ المعادلة هى ص = ٢س + ٢

## مثال ٧

**أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (٦ ، −٢)**

**الحل**

∵ م = $\frac{-٢ - ٢}{٦ - ٤}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢ ∴ معادلة الخط المستقيم هى: ص = −٢ س + حـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٤ ، ٢) فهى تحقق معادلته.

∴ ٢ = −٢ (٤) + حـ ⟸ حـ = ١٠ ∴ معادلة المستقيم هى: ص = −٢ س + ١٠

## مثال ٨

**أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) والذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°** (أسوان ٢٠٢٣)

**الحل**

∵ معادلة الخط المستقيم هى: ص = م س + حـ

، الميل (م) = ظا ٤٥° = ١ ∴ معادلة المستقيم هى: ص = س + حـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ١)

∴ ١ = ١ + حـ ∴ حـ = ٠

∴ معادلة الخط المستقيم هى: ص = س

## مثال ٩

**أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وعمودى على الخط المستقيم المار بالنقطتين ﺃ(٢ ، -٣) ، ﺏ(٥ ، -٤)**

**لاحظ أن**

إذا كان ميل الخط المستقيم هو $\frac{أ}{ب}$ فإن ميل الخط المستقيم العمودى عليه هو $\frac{-ب}{أ}$ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

**الحل**

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-٤ - (-٣)}{٥ - ٢} = \frac{-١}{٣}$

∴ ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{أب}$ = ٣

∴ معادلة الخط المستقيم هى: ص = ٣ س + جـ

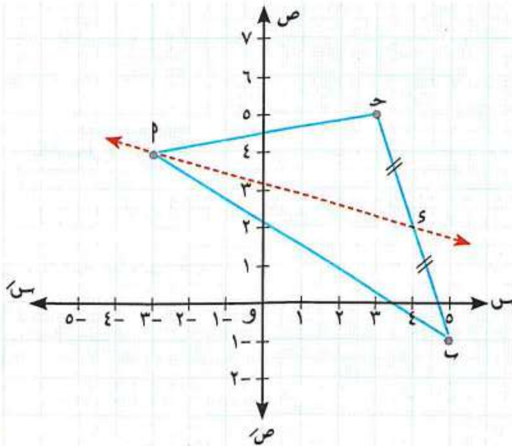
∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) فهى تحقق معادلته.

∴ ٢ = ٣ (١) + جـ ⟸ ٢ = ٣ + جـ ⟸ جـ = -١ ∴ معادلة المستقيم هى: ص = ٣س - ١

## مثال ١٠

**إذا كانت ﺃ (-٣ ، ٤) ، ﺏ (٥ ، -١) ، جـ (٣ ، ٥) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ﺃ وينصف $\overline{بجـ}$**

**الحل**




نفرض أن نقطة منتصف $\overline{بجـ}$ هى ء

∴ ء $\left(\frac{٥ + ٣}{٢} ، \frac{-١ + ٥}{٢}\right)$ ∴ ء (٤ ، ٢)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أء}$ = $\frac{٤ - ٢}{-٣ - ٤} = \frac{٢}{-٧}$

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أء}$ هى:

ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة ﺃ (-٣ ، ٤) فهى تحقق معادلته.

∴ ٤ = $\frac{-٢}{٧}$ × (-٣) + جـ ∴ جـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ معادلة المستقيم هى: ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + $\frac{٢٢}{٧}$ **أو** معادلة المستقيم هى: ٢س + ٧ ص = ٢٢

(عند ضرب طرفى المعادلة × ٧)

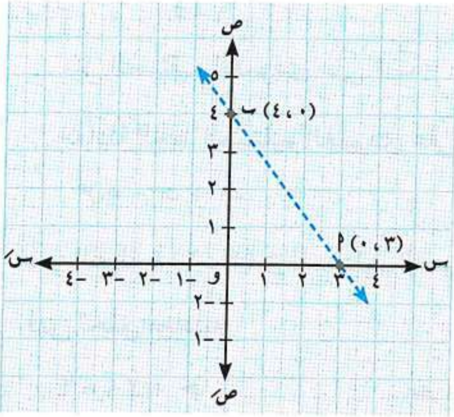
## مثال ١١

**أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$ جزأين موجبين طولاهما ٣ سم ، ٤ سم على الترتيب، ثم أوجد مساحة سطح المثلث المحدد بمحورى الإحداثيات والمستقيم.**

**الحل**

بفرض ؏ هى نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات ∴ ؏ (٣ ، ٠)

وبفرض ب هى نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات ∴ ب (٠ ، ٤)




ميل $\overleftrightarrow{\text{؏ ب}}$ = $\frac{٤ - ٠}{٠ - ٣}$ = $\frac{-٤}{٣}$

وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤ وحدات طولية

∴ معادلة المستقيم هى:

ص = $\frac{-٤}{٣}$ س + ٤ أو ٤ س + ٣ ص = ١٢

مساحة سطح المثلث و؏ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ وحدات مربعة

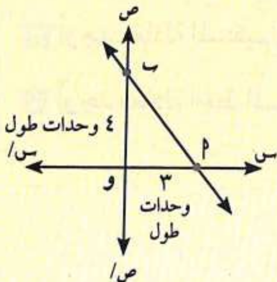
## سؤال ٤

١ **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) والموازى للخط المستقيم المار بالنقطتين ؏ (٣ ، -٤) ، ب (٥ ، -٣)

٢ **أوجد** معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، -٢) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٣ **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة ؏ (٥ ، -٢) وبمنتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث ب (٣ ، ٢) ، حـ (-١ ، -٤)

٤ **فى الشكل المقابل:**




$\overleftrightarrow{\text{؏ ب}}$ مستقيم حيث: و؏ = ٣ وحدات طول ،

و ب = ٤ وحدات طول. **أوجد:**

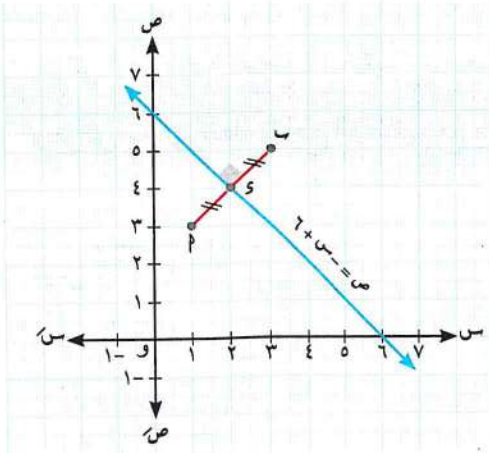
( ا ) إحداثيى منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$

(ب) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل عموديًا على $\overleftrightarrow{\text{؏ ب}}$

## مثال ١٢

أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ من نقطة فى منتصفها حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥)

**الحل**




نفرض أن النقطة ء هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ء $\left(\frac{١ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}\right)$ ∴ ء (٢ ، ٤)

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{٥ - ٣}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$

∴ ميل المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ = −١

∴ معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ هى:

ص = −س + حـ

، ∵ النقطة ء (٢ ، ٤) ∈ للمستقيم العمودى

فهى تحقق معادلته

∴ ٤ = −٢ + حـ ∴ حـ = ٦

∴ **معادلة الخط المستقيم هى** ص = −س + ٦

## سؤال ٥

١ **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −١) ، (١ ، ١)

٢ **أوجد** معادلة محور التماثل للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين أ (−٣ ، ٢) ، ب (٢ ، −٣)

٣ **أوجد** معادلة المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ من نقطة أ ، حيث أ (−٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٦)

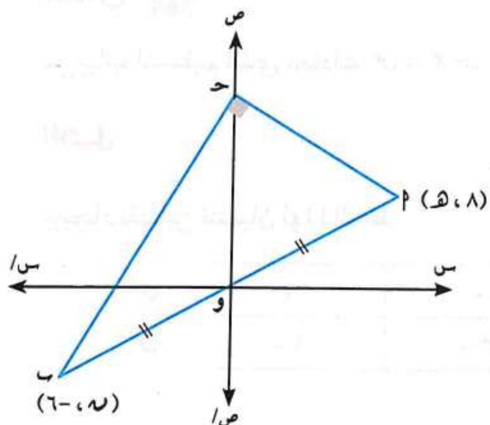
٤ **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٥) ويوازى المستقيم الذى معادلته ٢س + ص −٧ = صفر

(الجيزة ٢٠٢٤)

## مثـال ١٣

في الشكل المقابل: $\Delta$ ؟ ب حـ قائم الزاوية فى حـ ،

؟ (٨ ، هـ) ، ب (ىٓ، −٦) ، و منتصف $\overline{\text{؟ ب}}$ أوجـد:




١ قيمة هـ + ىٓ    ٢ معادلة $\overleftrightarrow{\text{؟ حـ}}$

**الحـل**

١ ∵ منتصف $\overline{\text{؟ ب}}$ هى نقطة الأصل

∴ $\left(\frac{٨ + ىٓ}{٢} ، \frac{هـ - ٦}{٢}\right) = (٠ ، ٠)$

∴ $\frac{٨ + ىٓ}{٢} = ٠$ ، $\frac{هـ - ٦}{٢} = ٠$

∴ ىٓ = −٨ ، هـ = ٦ ⟸ هـ + ىٓ = −٢

٢ ؟ (٨ ، ٦) ، ب (−٨ ، −٦)

∵ $\Delta$ ؟ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ ؟ ب = $\sqrt{(٨ + ٨)^٢ + (٦ + ٦)^٢}$ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ وحدة طول

∵ و منتصف $\overline{\text{؟ ب}}$

∴ حـ و = $\frac{١}{٢}$ ؟ ب = ١٠ وحدات طول

∴ إحداثى نقطة حـ (٠ ، ١٠)    ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{؟ حـ}}$ = $\frac{١٠ - ٦}{−٨}$ = $-\frac{١}{٢}$

وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هو ١٠ وحدات طول

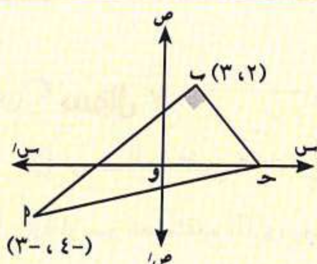
∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{؟ حـ}}$ هى: ص = $\frac{−١}{٢}$ س + ١٠    أو    ٢ ص = −س + ٢٠

### س؟ سؤال ٦

في الشكل المقابل:

و نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد، ؟ (−٤ ، −٣) ، ب (٢ ، ٣)

فإذا كان $\overline{\text{؟ ب}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، فأوجد:




١ إحداثيى النقطة حـ    ٢ معادلة $\overleftrightarrow{\text{؟ حـ}}$

## مثـال ١٤

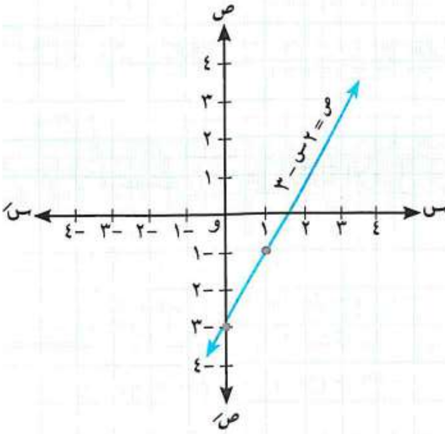
**مثِّل بيانيًا المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س −٣**

**الحـل**

**بإيجاد نقطتين تنتميان لهذا الخط**

| س | ١ | ٠ |
|---|---|---|
| ص | −١ | −٣ |

**ويكون التمثيل البيانى كما هو موضح بالرسـم:**

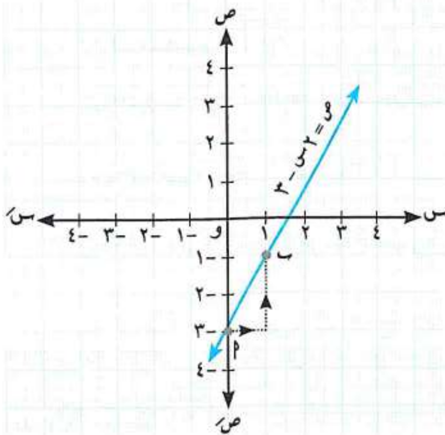



**حـل آخر**

**بمعلومية الميل ونقطـة التقاطع مع محور الصادات**

الميل = $\frac{٢}{١}$، نقطة التقاطع مع محور الصادات هى أ (٠ ، −٣)

∵ الميل = $\frac{٢}{١}$ نتحرك من النقطة أ (٠ ، −٣) فى اتجاه محور السينات الموجب وحدة واحدة فنصل للنقطة (١ ، −٣) ومنها نتحرك وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات، فنكـون عند النقطة ب (١ ، −١) ويكون $\overleftrightarrow{أب}$ هو المستقيم المطلوب.



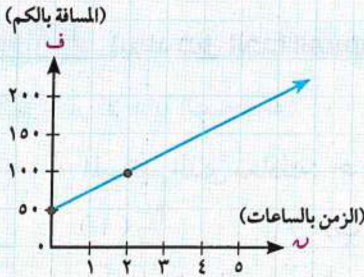

**سؤال ٧**

١ **ارسم المستقيم** ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + ١ باستخدام الميل ونقطة التقاطع مع محور الصادات.

٢ **ارسم المستقيم** الذى يمر بالنقطة (−١ ، −٢) وميله $\frac{٣}{٤}$

## تطبيقات عملية على معادلة الخط المستقيم:

### مثال ١٥




الشكل المقابل:
يمثل العلاقة بين المسافة (ف) التى تقطعها سيارة بالكيلومتر والزمن ن بالساعة الذى قطعت فيه السيارة هذه المسافة. **أوجد:**

١ المسافة المقطوعة عند بداية الحركة.

٢ سرعة السيارة.

٣ معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن.

**الحل**

١ المسافة المقطوعة عند بداية الحركة = ٥٠كم

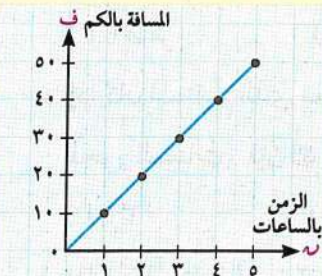
٢ سرعة السيارة = ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٥٠) ، (٢ ، ١٠٠)

∴ ع = $\frac{١٠٠ - ٥٠}{٢ - ٠}$ = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ كم/ ساعة

٣ ∵ معادلة الخط المستقيم هى ص = م س + حـ حيث ص هى المسافة (ف)، س هى الزمن (ن)

∴ ف = ٢٥ ن + ٥٠

### سؤال ٨




الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف) بالكيلومترات والزمن (ن) بالساعة لحركة سيارة.

أوجد:

١ المسافة المقطوعة بعد ٣ ساعات.

٢ الزمن الذى تقطع فيه السيارة مسافة ١٥كم.

٣ سرعة السيارة.

٤ معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن.




## تدريبات الأضــواء

### أولاً إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات إذا عُلم معادلته:

**١ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ المستقيم الذى معادلته: حـس + ء ص + ب = ٠ ميله = ..............

(ا) $\frac{-ء}{ب}$ (ب) $\frac{-ء}{حـ}$ (جـ) $\frac{-ب}{حـ}$ (د) $\frac{-حـ}{ء}$

٢ ميل المستقيم الذى معادلته: س − ٥ = ٠ هو .............. (الفيوم ٢٠٢٢)

(ا) ٥ (ب) صفر (جـ) غير معرف (د) $\frac{١}{٥}$

٣ المستقيم الذى معادلته: ص = ٣س − $\frac{٥}{٣}$ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله ........... وحدة طول.

(ا) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{-٥}{٣}$

٤ المستقيم الذى معادلتــه: ٢س + ٥ص − ١٠ = ٠ يقطع من محور السينات جزءًا طوله .......... وحدة طول.

(ا) $\frac{٢}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٥

٥ المستقيم الذى معادلته: ٣ص = ٢س + ٦ يقطع جـزءًا من محور الصـادات طوله ........ وحدة طول. (الشرقية ٢٠٢٢)

(ا) ٢ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٣

٦ إذا كان المستقيم الذى معادلته: ص = ك س + ٥ يوازى محور السينات فإن ك = ..............

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٧ إذا كان المستقيم الذى معادلته: ك س + $\sqrt{٣}$ ص = ٤ يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإن ك = .............. (الشرقية ٢٠٢٣)

(ا) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $-\sqrt{٣}$

٨ إذا كان المستقيم $ل_١$ : ٢ س − ك ص = ٣ ، المستقيم $ل_٢$ : ص + ٣ س + ٢ = ٠ متعامدين فإن ك = .............. (أزهر الأقصر ٢٠٢٤)

(ا) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) −٦

**٢ أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المستقيمات الآتية:**

١ ٢س + ٣ص = ٦ (السويس ٢٠٢٢)

٢ ٣س + ٥ص = ٦ (مطروح ٢٠٢٢)

٣ ٣س + ٤ص = ١٢ (أسيوط ٢٠٢٢)

٤ ١٠ − س = ٢ص (الفيوم ٢٠٢٤)

٥ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ٢$ (سوهاج ٢٠٢٣)

٦ −ص = ٣س − ٥ (المنيا ٢٠٢٠)

---

**٣ أثبت أن:**

١ المستقيم المار بالنقطتين (−١، ٣)، (٢، ٤) يوازى المستقيم الذى معادلته ٣ص − س − ٦ = ٠ (أسوان ٢٠٢٢)

٢ المستقيم المار بالنقطتين (−١، ٣)، (٢، ٤) عمودى على المستقيم الذى معادلته ص + ٣س + ١ = ٠ (السويس ٢٠٢٢)

---

**٤** إذا كان المستقيم ص = م س + حـ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٦، ٤)، (٢، ١)،

فأوجد قيمة: م (القاهرة ٢٠٢٢)

---

**٥** إذا كان المستقيم الذى معادلته: أ س − ٢ص − ٥ = ٠ يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة: أ (شمال سيناء ٢٠٢٣)

---

**٦** إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ معادلته: ص = س + ٥

فأوجد قيمة: ك إذا كان: (قنا ٢٠٢٣)

١ $ل_١ // ل_٢$

٢ $ل_١ \perp ل_٢$

---

**٧** إذا كان المستقيم ص = (٢ك − ١) س + ٧ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

فأوجد قيمة: ك (قنا ٢٠٢٣)

---

**٨** فى الشكل المقابل:

نظام إحداثى متعامد،

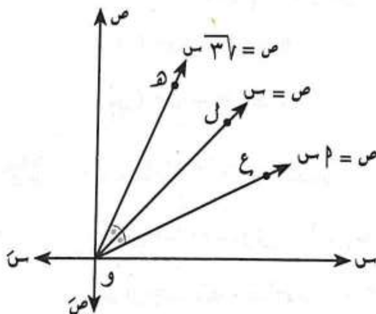
إذا كانت: معادلة $\overleftarrow{وهـ}$ هى ص = $\sqrt{٣}$ س

ومعادلة $\overleftarrow{ول}$ هى ص = س

ومعادلة $\overleftarrow{وع}$ هى ص = أ س

حيث $\overleftarrow{ول}$ ينصف (∠ هـ و ع)

فأوجد قيمة: أ



## ثانيًا إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات:

**٩** اختر الإجابة الصحيحة:

١ معادلة محور السينات هى ............ (القاهرة ٢٠٢٢)

( ا ) س = ٠ (ب) س = ١ (جـ) ص = ٠ ( د ) ص = ١

٢ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ١ ويمر بنقطة الأصل هى ............ (أسوان ٢٠٢٢)

( ا ) ص = س + ١ (ب) س = ١

(جـ) ص = ١ ( د ) ص = س

٣ معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢، -٢) ويوازى محور السينات هى ............

( ا ) ص = س + ٢ (ب) ص = -٢

(جـ) س = ٢ ( د ) ص + س = -٢

٤ معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٤ ، -٥) ويوازى محور الصادات هى ............ (الغربية ٢٠٢٢)

( ا ) ص = ٤ (ب) ص = -٥

(جـ) س = ٤ ( د ) س = -٥

٥ معادلة المستقيم الذى ميله ٣ ويقطع ٤ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات هى ............

( ا ) س = ٣ ص + ٤ (ب) ص = ٤ س + ٣

(جـ) ص = ٣ س + ٤ ( د ) ص = ٤

٦ معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات طول هى ..........

( ا ) س = ٢ ص + ٣ (ب) ص = -٢ س + ٣

(جـ) س = ٢ ص - ٣ ( د ) ص = ٢ س - ٣

٧ معادلة المستقيم العمودى على المستقيم الذى معادلته ص = س ويمر بالنقطة (٣ ، ٢) هى ..........

( ا ) س - ص = ٥ (ب) س + ص = ٥

(جـ) س + ص = ١ ( د ) س - ص = ١

---

**١٠** أوجد معادلة الخط المستقيم:

١ الذى ميله يساوى -١ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات طول، ثم أوجد نقطة تقاطعه مع محور السينات. (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

٢ الذى ميله يساوى ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٠) (الإسكندرية ٢٠٢٢)

٣ المار بالنقطة (٠ ، ٣) وميله يساوى $\frac{-١}{٣}$ (الإسكندرية ٢٠٢٢)

٤ الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويمر بالنقطة (١ ، ٣). (البحر الأحمر ٢٠٢٢)

٥ المار بالنقطتين: (١ ، ٢) ، (-١ ، -٢) (دمياط ٢٠٢٣)

٦ المار بالنقطتين: (٢ ، ٣) ، (١ ، ٥) (أبناؤنا فى الخارج ٢٠٢٣)

٧ المار بالنقطتين: (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤) (بورسعيد ٢٠٢٤)

٨ المار بالنقطة (١ ، ٤) ويكون موازيًا للمستقيم الذى معادلته س + ٢ ص - ٤ = صفر. (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

٩ العمودى على المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س + ٧ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات طول. (أسيوط ٢٠٢٣)

١٠ الذى يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله ٦ وحدات ويكون عموديًّا على المستقيم الذى معادلته ٣س - ٤ ص + ٧ = ٠ (أبناؤنا فى الخارج ٢٠٢٣)

١١ المار بالنقطة (-٢ ، ٣) وعمودى على المستقيم الذى معادلته ص = $\frac{١}{٢}$ س - ٥ (الدقهلية ٢٠١٣)

١٢ المار بالنقطة (٣ ، -١) الموازى للخط المستقيم المار بالنقطتين أ (-٢ ، ١) ، ب (١ ، ٥). (الشرقية ٢٠٢٣)

١٣ المار بالنقطة (١ ، -٣) وعمودى على الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين أ (٥ ، -٦) ، ب (٣ ، ٧).

١٤ الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزأين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ وحدات طول على الترتيب.

١٥ المار بالنقطة (١ ، -٢) ويقطع جزأين متساويين من محورى الإحداثيات فى الربع الرابع. (المنيا ٢٠٢١)

١٦ المار بنقطة الأصل ويوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٦٠° (المنيا ٢٠٢٣)

---

**١١** إذا كانت النقط أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٣ ، ٥) هى رءوس مثلث ،

فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{\text{ب حـ}}$ (كفر الشيخ ٢٠٢٣)

---

**١٢** أ ب حـ مثلث فيه أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، -٢) ، حـ (٣ ، ٤) ، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، رُسم $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ (المنوفية ٢٠٢٢)

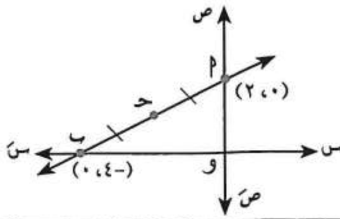
---

**١٣** أ ب حـ ء مربع فيه أ (٥ ، ٤) ، حـ (-١ ، ٦) ، أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ (الغربية ٢٠٢٢)

---

**١٤** أوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (-٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٤)

**١٥** في الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٤)



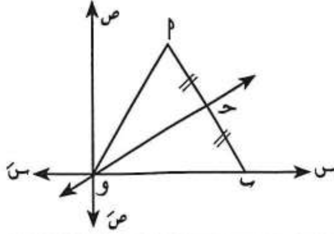

حـ منتصف $\overline{أب}$ ، أوجد:

١ إحداثيي نقطة حـ

٢ معادلة $\overleftrightarrow{حـ و}$

---

**١٦** في الشكل المقابل: (دليل التقويم)

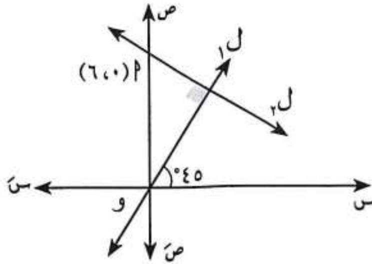



$\triangle$ أ ب و متساوى الأضلاع ،

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{و حـ}$

---

**١٧** في الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٤)




المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدان،

المستقيم $ل_١$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

زاوية قياسها ٤٥° ، أ (٠ ، ٦)، أوجد:

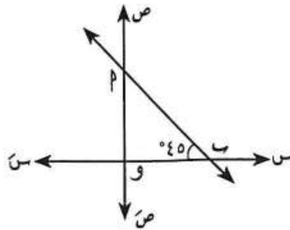
١ معادلة المستقيم $ل_١$

٢ معادلة المستقيم $ل_٢$

٣ نقطة تقاطع المستقيم $ل_٢$ مع محور السينات

---

**١٨** في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٣)

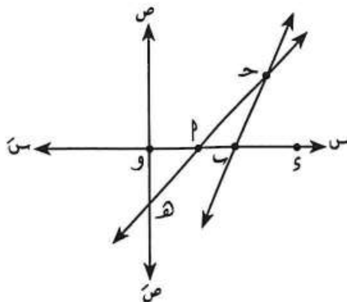



$\overleftrightarrow{أب}$ يقطع من المحور السينى جزءًا طوله ٣ وحدات طول ،

ق ($\angle$ أ ب و) = ٤٥° ، أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أب}$

---

**١٩** في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٦)




«و» هى نقطة الأصل، النقط أ ، ب ، ء تقع على محور السينات.

ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\sqrt{٣}$ ، معادلة $\overleftrightarrow{أ حـ}$ هى س − ص = ٣ أوجد:

١ ميل $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، طول $\overline{و هـ}$

٢ ق ($\angle$ حـ ب ء) ، ق ($\angle$ حـ أ ء) ، ق ($\angle$ أ حـ ب)

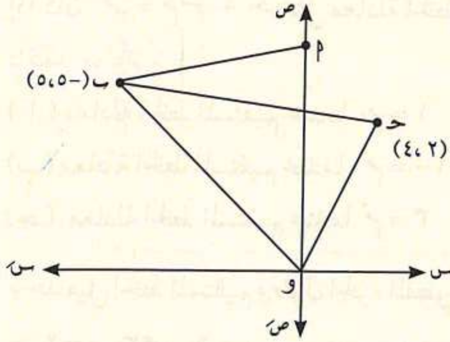
## تفكير إبداعي TIMSS

**٢٠** في الشكل المقابل:

إذا كانت مساحة $\Delta$ و أ ب = مساحة $\Delta$ و حـ ب ،

النقطة «و» هي نقطة الأصل.

فأوجد إحداثيي النقطة أ




---

**٢١** أ ب حـ ء مربع فيه: أ (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ص) فإذا كان: طول ضلعه ٥ وحدات ،

فأوجد قيمة ص الموجبة. (القاهرة ٢٠٢٤)

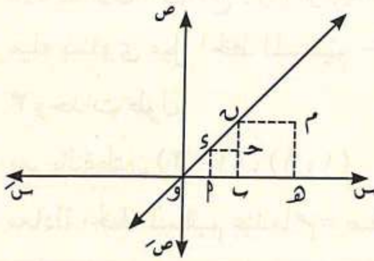
---

**٢٢** في الشكل المقابل:

أ ب حـ ء ، ب هـ م ن مربعان ، حيث م (٨ ، ٤)

أولًا: أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ن ء}}$

ثانيًا: أوجد إحداثيي النقطة ء



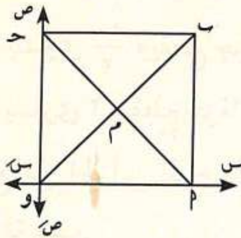

---

**٢٣** في الشكل المقابل:

إذا كان: أ و حـ ب مربعًا ،

م نقطة تقاطع قطريه، حيث م (٢ ، ٢)

فأوجد: معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، مساحة المربع أ و حـ ب



## تدريبات الكتاب المدرسى

١ إذا كان: ص = م س + حـ تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات،
فأكمل ما يأتى:

(أ) معادلة الخط المستقيم عندما م = ١ ، حـ = ٣ تكون على الصورة ............
(ب) معادلة الخط المستقيم عندما م = −٢ ، حـ = ١ تكون على الصورة ............
(جـ) معادلة الخط المستقيم عندما م = ٣ ، حـ = صفر تكون على الصورة ............

---

٢ أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات فى كل مما يأتى:

١ ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ (البحيرة ٢٠٢٣)
٢ ٥س + ٤ص − ١٠ = ٠ (البحيرة ٢٠٢٢)
٣ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ (الإسكندرية ٢٠٢٣)

---

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات الآتية:

١ ميله يساوى ٢ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.
٢ ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات طول.
٣ يمر بالنقطتين (٢،−١) ، (١ ، ١)
٤ معادلة الخط المستقيم عندما م = صفر، حـ = صفر (أسيوط ٢٠٢٣)

---

٤ ارسم الخط المستقيم فى كل من الحالات الآتية:

١ ميله يساوى $\frac{-١}{٢}$ ويقطع جزءًا من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى وحدة واحدة.
٢ ميله يساوى ٢ ويقطع جزءًا من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوى ٣ وحدات.
٣ يقطع من الجزأين الموجبين للمحورين السينى والصادى جزأين طولاهما ٢، ٣ من الوحدات على الترتيب. (الدقهلية ٢٠٢٠)

---

٥ الجدول المقابل يمثل علاقة خطية:

| | | | |
|---|---|---|---|
| س | ١ | ٢ | ٣ |
| ص = د (س) | ١ | ٣ | ﺃ |

١ أوجد معادلة الخط المستقيم.
٢ أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.
٣ أوجد قيمة ﺃ

٦ الشكل المقابل:

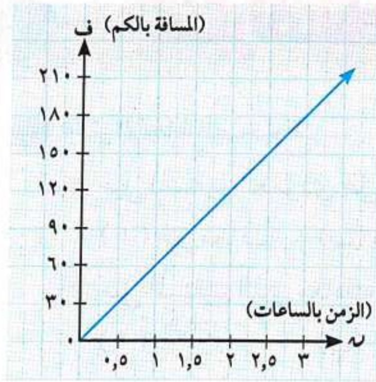
يمثل العلاقة بين المسافة (ف) التى تقطعها سيارة بالكيلومتر والزمن (بالساعة) الذى قطعت فيه هذه المسافة، أوجـد:

( ا ) المسافة المقطوعة بعد ٩٠ دقيقة.

(ب) الزمن الذى قطعت فيه السيارة ١٥٠ كيلومترًا.

(جـ) سرعة السيارة.

( د ) معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن.




---

٧ الشكل المقابل:

يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف) بالكيلومترات والزمن (ن) بالدقائق لكل من الجسمين ؍ ، ب

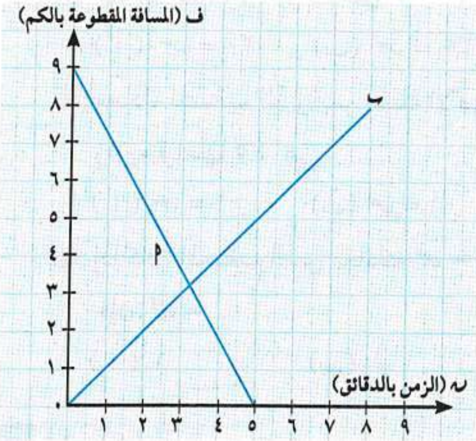
أجب عما يأتى:

( ا ) هل بدأ ؍ ، ب الحركة فى توقيت واحد؟

(ب) بعد كم دقيقة التقى ؍ ، ب؟

(جـ) ما سرعة ؍ ؟

( د ) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة الجسم ب



## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ ميل المستقيم العمودى على محور الصادات يساوى ............ (الدقهلية ٢٠٢٤)

(أ) غير معرف (ب) صفرًا (جـ) -١ (د) ١

٢ ميل المستقيم الذى معادلته أ س + ب ص = حـ = ٠ حيث ب ≠ ٠ يساوى ............ (القاهرة ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{-أ}{ب}$ (ب) $\frac{أ}{ب}$ (جـ) $\frac{-ب}{أ}$ (د) $\frac{ب}{أ}$

٣ ميل المستقيم الذى معادلته ص = ٣ هو ............ (الدقهلية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) غير معرف

٤ معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، -٣) ويوازى محور السينات هى ............ (الجيزة ٢٠٢٢)

(أ) س = -٢ (ب) س = -٣ (جـ) ص = -٢ (د) ص = -٣

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° هى ............ (القاهرة ٢٠٢٣)

(أ) س = ١ (ب) ص = ١ (جـ) ص = س (د) ص = -س

٦ إذا كان: المستقيم الذى معادلته ص = ك س + ١ يوازى المستقيم الذى معادلته ٢ ص = س - ٥ فإن: ك = ............ (الغربية ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) -٢

---

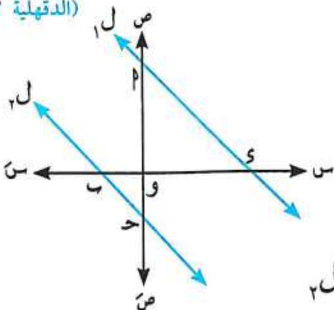
## ٢ أجب عما يأتى:

١ **أوجد** معادلة المستقيم الذى ميله ٤ ويقطع جزءًا طوله ٥ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات. (البحر الأحمر ٢٠٢٢)

٢ مستقيم ميله = ٣ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات. (البحيرة ٢٠٢٢)

(أ) **أوجد** معادلة هذا المستقيم. (ب) إذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطة (٢، ب) **فأوجد** قيمة ب

٣ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٢)




$ل_١$ // $ل_٢$ ، معادلة $ل_١$ هى ص = ٥ - س

ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين ء ، أ ،

المستقيم $ل_٢$ يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين ب ، حـ

حيث أ حـ = ٧ وحدات طول. **أوجد:**

(أ) إحداثيى النقطتين ب ، حـ (ب) معادلة المستقيم $ل_٢$

## ١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ البُعد العمودى بين المستقيمين ص + ١ = ٠ ، ص = −٥ هو ............ وحدات طول. (الشرقية ٢٠٢٤)

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) −٥

٢ إذا كان المستقيم ٢س + ٣ص − ٦ = ٠ يوازى المستقيم ٦س − أ ص + ٧ = ٠ ، فإن: أ = ............ (الدقهلية ٢٠٢٤)

(أ) −٩ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٢

٣ النقطة التى تقع فى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (−١ ، −١) ، ب (١ ، ٩) هى ............ (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) (٢ ، ٥) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (٢ ، ٤) (د) (٠ ، ٤)

٤ إذا كان أ ب حـ ء مربعًا حيث أ (−١ ، −٤) ، حـ (٥ ، ٤) ، فإن ميل $\overleftrightarrow{بء}$ = ............ (الأسكندرية ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $-\frac{٤}{٣}$ (جـ) $-\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٥ البعد بين النقطة (٤ ، ظا$^٢$ ٦٠°) ومحور السينات هو ............ وحدة طول. (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٥

٦ المستقيم الذى معادلته ٢ص − ٣س = ١٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله ............ وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٢}$

٧ ميل المستقيم: س − ٥ = صفر هو ............ (بنى سويف ٢٠٢٤)

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) غير معرف

٨ البُعد بين النقطتين (٣ ، أ) ، (−١ ، أ) هو ............ وحدة طول. (دمياط ٢٠٢٤)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

٩ إذا كان م$_١$ ، م$_٢$ ميلى مستقيمين متوازيين، فإن: ............ (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) م$_١$ − م$_٢$ = صفر (ب) م$_١$ + م$_٢$ = صفر

(جـ) م$_١$ م$_٢$ = صفر (د) $\frac{م_١}{م_٢}$ = صفر

## ٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (−٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١) ، حـ (س ، ٣)

**فأوجد قيمة** س + ص (تقييمات الوزارة)

٢ **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) وعموديًّا على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (سوهاج ٢٠٢٣)

٣ **أثبت أن:** النقط أ (−٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٥) ، حـ (٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة. (بورسعيد ٢٠٢٤)

٤ **أوجد** ميل الخط المستقيم الذى معادلته: $\frac{ص - ٢}{س} = \frac{١}{٢}$ ،

ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات. (بنى سويف ٢٠٢٤)

٥ إذا كان $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م حيث م (٥ ، ٧) ، ب (٨ ، ١١) **فأوجد كلًّا من:** (أسيوط ٢٠٢٣)

(١) إحداثى النقطة أ (٢) مساحة الدائرة م بدلالة $\pi$

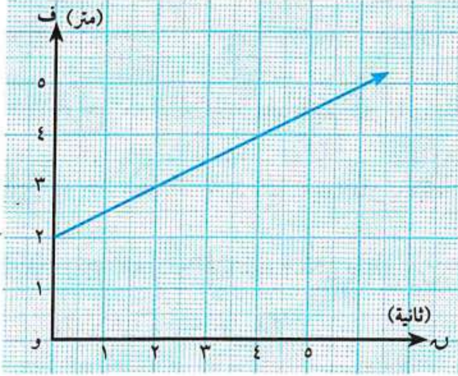
٦ **أوجد** معادلة المنصف العمودى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين أ (−٣ ، ٢) ، ب (٢ ، −٣).

(القاهرة ٢٠١٩)

٧ **أثبت أن:** $\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ حيث أ (−٦ ، ٧) ، ب (٦ ، ٣) ، حـ (−٢ ، −١)

وإذا كان هـ منتصف $\overline{أب}$ **فأوجد** إحداثيى هـ ، ثم بيِّن أن حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب . (المنوفية ٢٠٢٣)

**١ الشكل المقابل:** (الدقهلية ٢٠٢٤)




يمثل حركة جسيم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث المسافة(ف) مقيسة بالمتر والزمن (ن) بالثانية؛ أوجد:

(أ) المسافة عند بدء الحركة.

(ب) سرعة الجسيم.

(جـ) معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسيم.

(د) المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

(هـ) الزمن الذى يقطع فيه الجسيم مسافة ٥,٣ من المتر من بدء الحركة.

---

**٢ اختر الإجابة الصحيحة:**

١ المستقيم الذى معادلته ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله ............ وحدة طول. (البحيرة ٢٠٢٣)

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

٢ إذا كان المستقيمان ٣س − ٤ص − ٣ = ٠، كص + ٤س − ٨ = ٠ متعامدين، فإن ك = ............

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، كس + ٢ص = ٠ متوازيين، فإن ك تساوى ............

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

٤ مساحة سطح المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س − ٤ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ تساوى ............

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٥

٥ $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ٥)، (٥ ، ٢)؛ أى من النقط التالية ينتمى إلى $\overleftrightarrow{أب}$ ؟

(أ) (١ ، ٦) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٣ ، −٤)

٦ إذا كان أ (٣ ، ٥)، ب (٢ ، −١)، حـ (س ، ص)، فإن إحداثيى نقطة حـ التى تجعل △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب هى ............

(أ) (٦ ، −١) (ب) (−٤ ، ٥) (جـ) (٣ ، −٢) (د) (٨ ، −٢)

٣ إذا كان أ (٥ ، -٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، -٣)

فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{بحـ}$

٤ أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥).

٥ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٥) ويوازى المستقيم س+٢ ص-٧=٠ (الغربية ٢٠٢٣)

٦ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (-٢ ، -١) ثم **أثبت أنه** يمر بنقطة الأصل.

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزأين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب.

٨ أ ب حـ مثلث فيه أ (١ ، ٢) ، ب (٥، -٢) ، حـ (٣، ٤)، ء منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ // $\overleftrightarrow{بحـ}$ ويقطع $\overline{أحـ}$ فى هـ ، أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ .

٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) ، (٠ ، ٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-١، ٤) ، (١ ، ٧).

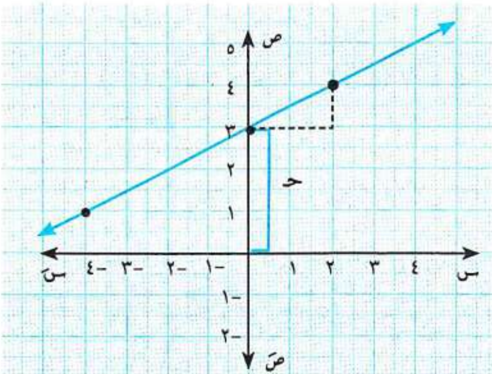
١٠ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١) ، (٦، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

١١ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات، حيث أ ( س، ٧) ، ب (٣، ٥) فأوجد قيمة س .

١٢ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{حـء}$ // محور السينات، حيث حـ( ٤ ، ٢) ، ء(-٥، ص) فأوجد قيمة ص .

١٣ أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين ( ٣ ، -٢) ، (٥ ، ١) .

١٤ فى الشكل المقابل أوجد:




( أ ) ميل الخط المستقيم (م).

(ب) طول الجزء المقطوع من محور الصادات( حـ ) .

(جـ) معادلة الخط المستقيم بمعلومية م ، حـ

( د ) طول الجزء المقطوع من محور السينات.

(هـ) مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزأين المقطوعين من محورى الإحداثيات .